Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2017/18
1. forduló

1. Legyenek $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények. Adja meg annak szükséges és elegendő feltételét, hogy $f \circ g = g$ legyen. (4 pont)

2. Ismert a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség: ha $a_1, \ldots, a_n > 0$, akkor

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\ .$$

   Ezt felhasználva igazolja, hogy bármely $a, b, c > 0$ esetén

$$\frac{8}{27}(a+b+c)^3 \geq (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc\ .$$

   (6 pont)

3. Legyen $\mathbf{a} := (a_n)_{n=1}^{\infty}$ egy $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$-beli sorozat, vagyis $a_n \in \mathbb{N}$. Igazolja az alábbiakat:

   a) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha \in \mathbb{N}$, és van olyan k pozitív egész, amelyre $a_n = \alpha$ minden $n \geq k$ esetén. (5 pont)

   b) Ha az $\mathbf{a}$ kölcsönösen egyértelmű (vagyis $a_n \neq a_m$ ha $n \neq m$), akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. (5 pont)

4. Igazolja az alábbiakat:

   a) Bármely $\underline{u}, \underline{v}$ térbeli vektorok esetén teljesül az alábbi összefüggés:

$$\|\underline{u} \times \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 \cdot \|\underline{v}\|^2 - (\underline{u} \cdot \underline{v})^2\ .$$

   b) Legyenek $\underline{u}, \underline{v}$ és $\underline{w}$ olyan nullvektortól különböző térbeli vektorok, amelyek között nincs két párhuzamos vektor. Ekkor az $\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w})$ vektor a $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok által kifeszített síkban, míg az $(\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{w}$ vektor az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által kifeszített síkban fekszik. Milyen műveleti tulajdonság "nem teljesülése" következik a fenti állításból? (10 pont)

5. Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ vektortér alábbi részhalmazait: $H_1 = \{(a,0,0,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, $H_2 = \{(a,1,1,1) \mid a \in \mathbb{R}\}$, $H_3 = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}$ és $b = a+c, d = 2a\}$, $H_4 = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}$ és $b = a+c+1,\ d = 2a\}$. Melyik vektorhalmaz altér az $\mathbb{R}^4$ vektortérben? Válaszát indokolja! Az alterek esetén adja meg azok dimenzióját és egy bázisát! (10 pont)

6. Mutassa meg, hogy tetszőleges A, B, C, D halmazokra:

   a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

   b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,

   c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$,

   d) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$. (10 pont)

7. Legyen $f : A \to B$ tetszőleges és $g : B \to C$ bijektív leképezés. Mutassa meg, hogy a $g \circ f$ leképezés

   a) akkor és csak akkor injektív, ha f injektív,

   b) akkor és csak akkor szürjektív, ha f szürjektív,

   c) akkor és csak akkor bijektív, ha f bijektív. (10 pont)

Beadási határidő: 2017. október 23.(hétfő), 12:00

A feladatok megoldásait október 26. (csütörtök) 18:00-kor beszéljük meg a Matematika Tanszék könyvtárában (I.ép. 314.)

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!