Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Matematika Tanszék

Matematikai feladatmegoldó verseny 2012/13.
1. forduló

1. Az (a_n) sorozatot nullsorozatnak nevezzük, ha az (a_n) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-beli, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (a) Adjon példát olyan (a_n) nullsorozatra, amelyre az $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ sorozat divergens.

   (b) Tegyük fel, hogy (a_n) egy olyan nullsorozat, amelyre az $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ sorozat konvergens, és legyen $a := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

   (i) Igazolja, hogy $|a| \le 1$ (indirekt bizonyítás).

   (ii) Mutassa meg, hogy bármely $a \in [-1, 1]$ számhoz megadható olyan nullsorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$.

   (10 pont)

2. Legyenek A, $B \subset \mathbb{R}$ nemüres és korlátos halmazok.

   (a) Igazolja, hogy $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.

   (b) Adjon példát olyan A, B halmazokra, hogy $\sup(A \cap B) < \min\{\sup(A), \sup(B)\}$.

   (10 pont)

3. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ térbeli vektorok. Az $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ szorzatot az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyes szorzatának hívjuk.

   (a) Mutassa meg, hogy ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ nem egy síkban lévő vektorok, akkor az $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ az általuk kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatával egyenlő. (Az előjel pozitív, ha $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ jobbrendszert alkot, negatív, ha $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ balrendszert alkot.)

   (b) Mutassa meg, hogy tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ térbeli vektorok esetén

   $$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}).$$

   (c) Legyenek egy paralelepipedon csúcspontjai A=$(1, 2, 3)$, B=$(2, 5, 7)$, C=$(6, 4, 5)$, D=$(7, 7, 9)$, E=$(2, 6, 8)$, F=$(3, 9, 12)$, G=$(7, 8, 10)$ és H=$(8, 11, 14)$. Határozza meg a paralelepipedon térfogatát!

   (10 pont)

4. Tekintsük az alábbi vektorokat:

   $\underline{a}_1 = (1, 6, 4), \quad \underline{a}_2 = (2, 4, -1), \quad \underline{a}_3 = (-1, 2, 5), \quad \underline{b}_1 = (1, -2, -5), \quad \underline{b}_2 = (0, 8, 9)\,.$

   (a) Mutassa meg, hogy
   $$\mathcal{L}\left(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\right) = \mathcal{L}\left(\underline{b}_1, \underline{b}_2\right)!$$

   (b) Legyen
   $$V = \mathcal{L}\left(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\right).$$
   Adjon példát olyan V_1 és V_2 alterekre, hogy $V \oplus V_1 = \mathbb{R}^3$ illetve $V + V_2 = \mathbb{R}^3$, de $V \oplus V_2 \neq \mathbb{R}^3$ teljesüljön!

   (10 pont)

5. Mutassa meg, hogy az S_4 permutációhalmaz minden eleme előáll az (1 2), (1 3) és (1 4) transzpozíciók szorzataként!

   (10 pont)

6. Legyan ρ és σ az A halmazon definiált ekvivalenciarelációk. Mutassa meg, hogy

   (a) $\rho^2 = A^2$, akkor és csak akkor, ha $\rho = A^2$.

   (b) $\rho\sigma = A^2$, akkor és csak akkor, ha $\sigma\rho = A^2$.

   (10 pont)

Beadási határidő: **2012. november 5.**
Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!