# PANNON EGYETEM
## MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR
### MATEMATIKA TANSZÉK

## MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY – 2011/12.

## 3. FORDULÓ

**1. feladat**

Ha az $f:[a,b]\to R$ függvény folytonos, differenciálható $]a,b[$-n, valamint az $f'$ integrálható az $[a,b]$-n, akkor az $f$ grafikonjának a hossza a következőképpen számítható: $\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}$. Számítsa ki az $f:[-2,5]\to R$, $f(x)=1+\frac{(x+3)^{2/3}}{2}$ függvény grafikonjának a hosszát! 10 pont

**2. feladat**

a) Igazolja, hogy az $x\to(x-\pi)ctg(x)$, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ függvény korlátos!

b) Az a) rész felhasználásával igazolja, hogy az $\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin(x))dx$ improprius integrál konvergens! 10 pont

**3. feladat**

Tekintsük az $A:R^3\to R^3$, $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1+2x_2,\ c\cdot x_1+x_2,\ 3x_1+x_2)$ lineáris transzformációt, ahol $c\in R$ valós paraméter.

a) Milyen $c$ paraméterérték esetén lesz a fenti lineáris transzformációnak egy egyszeres és egy kétszeres algebrai multiplicitású sajátértéke?

b) A fenti $c$ paraméterérték esetén adja meg a transzformáció sajátaltereit és a sajátértékek geometriai multiplicitását!

10 pont

## 4. feladat

Vizsgálja meg, hogy az alábbi $(V, \oplus, \otimes)$ struktúrákban mely vektortér axiómák (*V1 – V8* tulajdonságok) teljesülnek! Van-e a struktúrák között vektortér?

a) $V := R^3$. Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$, $\lambda \in R$.

$$\underline{a} \oplus \underline{b} := \left( \frac{1}{2} a_1, \frac{1}{2} a_2, \frac{1}{2} a_3 \right)$$

$$\lambda \otimes \underline{a} := (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

b) $V := R^3$. Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$, $\lambda \in R$.

$$\underline{a} \oplus \underline{b} := (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$$

$$\lambda \otimes \underline{a} := (\lambda a_1,\ a_2,\ a_3).$$

c) $V := R^3$. Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$, $\lambda \in R$.

$$\underline{a} \oplus \underline{b} := (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$$

$$\lambda \otimes \underline{a} := \underline{a}.$$

10 pont

## 5. feladat

Legyen $G$ egy csoport. Mutassa meg, hogy ha $a = a^{-1}$ minden $a \in G$-re, akkor $G$ Abel-csoport.

10 pont

## 6. feladat

Legyen $n > 1$ egy tetszőleges egész. Egy focibajnokságban *n* csapat vett részt. A bajnokság végére bármely két csapat pontosan egyszer játszott egymással, és egy mérkőzés sem volt döntetlen. Mutassa meg, hogy a csapatokat megjelölhetjük az $1, 2, \ldots, n$ egész számokkal, úgy, hogy az *i*-edik csapat megverte az *i+1*-edik csapatot minden $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re.

10 pont

**Beadási határidő: 2012. február 27.**
**Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!**