PANNON EGYETEM

MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR

MATEMATIKA TANSZÉK

MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY – 2010/11.

2. FORDULÓ

1. feladat:

Mutassa meg, hogy bármely $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ esetén

$$\sin x + \operatorname{tg} x > 2x.$$

10 pont

2. feladat:

Legyen n pozitív egész és $x \in \mathbb{R}$. Számítsa ki az

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n\,x^{n-1}$$

összeget!

10 pont

3. feladat:

a) Mutassa meg, hogy tetszőleges A m x n-es, mátrixra az $A \cdot A^T$ és az $A^T \cdot A$ mátrixok mindegyike szimmetrikus!

b) Ellenőrizze a fenti állítást egy konkrét 2x3-as mátrixra!

10 pont

4. feladat:

Legyen $M_0 = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_1 = -2x_2 + x_3, \quad x_4 = x_2 - x_3 \right\}$

a) Van-e olyan 2 egyenletből álló 4 ismeretlenes, illetve 3 egyenletből álló 4 ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek a megoldáshalmaza a fenti M_0 halmaz?
Ha igen, adjon rá példát!
Útmutatás: Mindkét esetben először a megoldáshalmaz alapján próbálja rekonstruálni az utolsó bázistranszformációs táblázatot!

b) Igaz-e, hogy a felírt homogén lineáris egyenletrendszerek inhomogén párjai mindig megoldhatóak, függetlenül attól, milyen $\underline{b}$ vektor áll a jobb oldalon?

10 pont

5. feladat:

Mutassa meg, hogy az S_4 permutációk halmazának minden eleme előáll az (1 2) és (1 2 3 4) ciklusokból szorzás segítségével!

10 pont

6. feladat:

Az ε komplex n-edik egységgyököt *primitív n-edik egységgyöknek* nevezzük, ha *n* a legkisebb olyan pozitív k kitevő, amelyre $\varepsilon^k = 1$.

Legyen ε egy *2n*-edik primitív egységgyök. Számítsa ki a $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k$ összeget!

10 pont

Beadási határidő: 2010. december 6.
Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!