Matematika feladatmegoldó verseny 2009/2010.
6. forduló – megoldások

1) $D_1 f(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

nem létezik, mivel

$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty$ és $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{y^4}}{y} = \lim_{y\to 0} \sqrt[3]{y} = 0.$$

2) Ha létezne ilyen f, akkor a

$D_2 D_1 f(x,y) = -2$, $(x,y) \in \Re^2$ és

$D_1 D_2 f(x,y) = 2$, $(x,y) \in \Re^2$

összefüggéseket kapnánk, ami ellentmond Schwarz tételének. Tehát az adott tulajdonságú f nem létezik.

3) $D_1 f(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = 0$

és

$$D_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = 0.$$

Ha f differenciálható lenne a $(0,0)$ pontban, akkor $f'(0,0) = (0,0)$ lenne és igaz lenne a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - D_1 f(0,0)(x-0) - D_2 f(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

összefüggés. Ez utóbbi limesz viszont nem létezik, hiszen

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

Tehát f nem differenciálható a $(0,0)$ pontban.

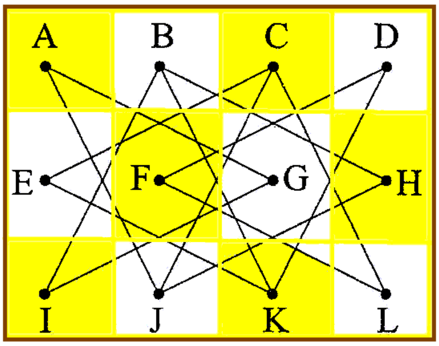
4) a) Mivel $A_{i+1} \setminus A_i \neq \emptyset$ ezért legfeljebb *m* -hosszú lánc van H -ban.

b) Legyen $A_i := \{0, 1, 2, ..., i\}$ ha $i \in N$.

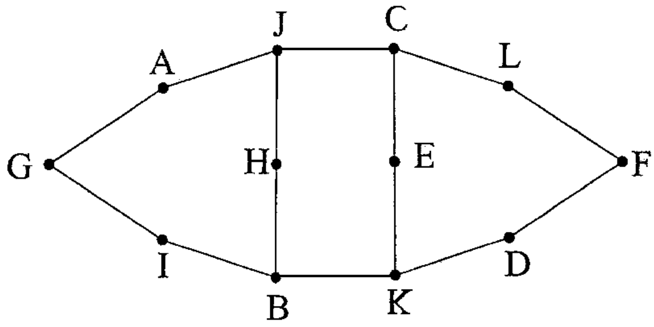
c) Legyen $A_n := \{0, 2, 4, ..., 2n\}$ ha $n \in N$
és legyen $A_{\Omega+k} := P \cup \{1, 3, 5, ..., 2k+1\}$ ha $k \in N$ és P jelöli a páros számok halmazát.

5) Lásd: http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/H6-betuk.gif és http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/H7.gif . H_7 -ben nincs Euler-kör, mert minden csúcsának fokszáma páratlan.

6) Legyenek a sakktábla mezői a gráf csúcsai, és két csúcsot pontosan akkor kössünk össze éllel, ha a nekik megfelelő mezők egy lóugrással egymásból elérhetőek:



Fgy15-18a.gif



Fgy15-18b.gif

A feladat Hamilton -kört vagy -utat keres ebben a gráfban. Mivel a {J,C,K,B} csúcsok el-vágó pontrendszert alkotnak, ezért Hamilton-kör nincs a gráfban. Hamilton-út azonban van, pl.: H,B,I,G,A,J,C,L,F,D,K,E.
(Lásd: Szalkai István: *Diszkrét Matematika Feladatgyűjtemény* 15.18. feladatának meg-oldását a 87-88. oldalakon.)