Matematika feladatmegoldó verseny 2009/2010.
5. forduló – megoldások

1. Mivel $0 < \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{2}{n} \dots \dfrac{n}{n} \le \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ és $1/n \to 0$, ha $n \to \infty$,
   a „rendőr-elv” szerint.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

2. A
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
   határérték formula alapján
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 1.$$
   Ezért minden elég nagy n-re
$$\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n}} > 1,$$
   és innen
$$\sin \frac{\pi}{2n} > \frac{1}{n}.$$
   Ismert, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ harmonikus sor divergens, ezért az összehasonlító kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi/2n)$ sor is divergens.

3. A mértani sorról tanultak alapján
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$$
   valahányszor $|x| = 1$. Innen tagonkénti differenciálással kapjuk, hogy
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, x^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{x\,(2-x)}{(1-x)^2}$$
   minden $x \in (-1, 1)$ esetén.

4. n = 105 162 624 = $a \cdot b \cdot c$ esetén a 7 db 2-est, 6 db 3-ast, 2 db 7-est és az egyetlen 23-ast kell három különböző hely (mivel *a*,*b* és *c* sorrendje számít) valamelyikére tennünk. Mivel a 2-esek azonosak, ezért ismétléses kombinációban választjuk ki őket. Tehát a lehetőségek száma

$$C_3^{7(ism)} \cdot C_3^{6(ism)} \cdot C_3^{2(ism)} \cdot C_3^{1(ism)} = \binom{7+3-1}{2} \cdot \binom{6+3-1}{2} \cdot \binom{2+3-1}{2} \cdot \binom{1+3-1}{2} = 18\,144 \,.$$

5.

$$\sum_{i=0}^{n} p(i) = \sum_{i=0}^{n} i^3 + 7i^2 + 3i - 9 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + 7\sum_{i=0}^{n} i^2 + 3\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n} 9 =$$

$= \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + 7\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\dfrac{n(n+1)}{2} - 9n$ a tanult összefüggések alapján.

6. a) S(n,1) = 1 mert az alaphalmazt csak egyetlen részre = önmagára kell osztanunk,
S(n,n) = 1 mert az n -elemű alaphalmazt n részre csak úgy oszthatjuk, ha minden elem egyelemű részhalmazt alkot,
S(n,2) azt kéri, hogy az alaphalmazt két (nemüres) részre osszuk fel. Az egyik részhalmaz a másik komplementere, és 2^n-2 nemüres olyan A részhalmaza van az alaphalmaznak, amelyre $\overline{A}$ sem üres. Azonban az { $A, \overline{A}$ } és { $\overline{A}, \overline{\overline{A}}$ } partíciók azonosak, ezért a különböző partíciók száma S(n,2) = (2^n-2)/2 = 2^{n-1} -1 .
S(n,n-1) = $\binom{n}{2}$ mert az n -elemű alaphalmazt n-1 részre csak úgy oszthatjuk, ha egyik részhalmaz kételemű, minden további elem egyelemű részhalmazt alkot,
S(n,3) kiszámolásához rögzítsük az alaphalmaz egy a_0 elemét, és a partíciókat úgy számoljuk össze, hogy a többi n-1 elem közül hányan vannak a_0 -al egy osztályban: ezt jelölje t, ami lehet 0 és n-3 között bármely egész szám. A maradék n-1-t elemet pedig kétfelé kell osztanunk, így
S(n,3) = $\sum_{t=0}^{n-3} \binom{n-1}{t} \cdot S(n-1-t,2) = \sum_{t=0}^{n-3} \binom{n-1}{t} \cdot S(n-1-t,2) = \sum_{t=0}^{n-3} \binom{n-1}{t} \cdot (2^{n-2-t} - 1)$.
b) S(n+1,k) = az eredeti alaphalmazt egy új elemmel bővítettük, amely elem lehet egyedül (ez S(n,k-1) eset) VAGY az új elem valamelyik régi partíció valamelyik részhalmazában található (ez $k\cdot$S(n,k-1) eset).