Matematikai feladatmegoldó verseny 2009/10
4. forduló — megoldások

1. Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int (\ln x)^2\,dx = \int 1\cdot(\ln x)^2\,dx = x\,(\ln x)^2 - \int x\,2\,(\ln x)\,\frac{1}{x}\,dx = x\,(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx.$$

Ismét parciálisan integrálva

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot(\ln x)\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c.$$

Behelyettesítve az előző integrálba kapjuk, hogy

$$\int (\ln x)^2\,dx = x\,(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c.$$

Ezért

$$\int_0^1 (\ln x)^2\,dx = \Big[x\,(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\Big]_0^1 = 2 - \lim_{x\to 0+}\Big(x\,(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\Big).$$

A L'Hospital-szabály felhasználásával

$$\lim_{x\to 0+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0,$$

és

$$\lim_{x\to 0+}\Big(x\,(\ln x)^2\Big) = \lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)^2}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0+}\frac{2\,(\ln x)\;x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0+}\,(-2x\,(\ln x)) = 0.$$

Tehát

$$\int_0^1 (\ln x)^2\,dx = 2.$$

2. Az $u=\sqrt{x}$ helyettesítéssel, majd parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx &= 2\int_0^\infty u\,e^{-u}du = 2\left[-u\,e^{-u}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-u}du = \\ &= 2\left[-u\,e^{-u}\right]_0^\infty - 2\left[\,e^{-u}\right]_0^\infty = -2\lim_{u\to\infty}\left(u\,e^{-u}\right) - 2\lim_{u\to\infty}e^{-u} + 2.\end{aligned}$$

Mivel $\lim\limits_{u\to\infty} e^{-u}=0$ és a L'Hospital-szabály szerint

$$\lim_{u\to\infty}\left(u\,e^{-u}\right) = \lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^u} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{e^u} = 0,$$

ezért

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx = 2.$$

3. Mivel

$$\frac{1}{k\ (k+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right),$$

ezért

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ (k+3)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{3}\sum_{j=4}^{n+3}\frac{1}{j} \\ &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right). \end{aligned}$$

Innen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ (k+3)}=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{18}.$$

4. A háromszög-egyenlőtlenség és a feltétel alapján

$$|(1+i)z^3+iz|\le|(1+i)z^3|+|iz|=|1+i||z|^3+|i||z|=\sqrt{2}|z|^3+|z|<\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{2}<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

5. Teljes indukcióval igazoljuk az állítást.

$n=1$-re $1^2\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 12}{12}$ teljesül.

Tegyük fel, hogy $n=k$-ra teljesül az állítás:

$$1^2\cdot 2+2^2\cdot 3+\dots+k^2(k+1)=\frac{k(k+1)(3k^2+7k+2)}{12}.$$

Az indukciós hipotézist felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &1^2\cdot 2+2^2\cdot 3+\dots+k^2(k+1)+(k+1)^2(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(3k^2+7k+2)}{12}+(k+1)^2(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(3k+1)}{12}+(k+1)^2(k+2) \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{3k^2+k}{12}+\frac{12k+12}{12}\right) \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{3k^2+13k+12}{12}\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(3(k+1)^2+7(k+1)+2)}{12}. \end{aligned}$$

azaz az állítás $n=k+1$-re is teljesül. A teljes indukció elve alapján így az állítás minden pozitív n-re teljesül.

6. Legyen $n=2k+1$. Ekkor az $1,2,\dots,n$, és így a $b_1,b_2,\dots,b_n$ számok között is pontosan k db páros és $k+1$ db páratlan szám található. (A $b_1,b_2,\dots,b_n$ sorozatban is minden 1 és n közötti egész szám pontosan egyszer szerepel.)

Az A szám pontosan akkor páratlan, ha minden szorzótényezője, azaz minden b_i-i szám páratlan. A b_i-i szám pedig pontosan akkor páraltan, ha az i és b_i paritása ellentétes, azaz ha i páros akkor b_i páratlan, és fordítva, ha i páratlan akkor b_i páros. De ekkor a $k+1$ db páratlan i-hez nem tudunk csak k db páros b_i-t megadni, így lesz olyan i, amelyre b_i-i páros, azaz A szükségképpen páros lesz.

Ha $n=2k$, akkor a fentiek szerint pontosan abban az esetben lesz A páratlan, ha b_i és i paritása ellentétes minden $i=1,\dots,n$-re. Ilyen sorozatokból $(k!)^2$ különböző adható meg.