Matematikai feladatmegoldó verseny 2009/10
2. forduló — megoldások

1. Mivel a számláló és a nevező határértéke is 0, a L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}\left(7+x^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3x^2-\frac{1}{2}\left(3+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}.$$

2. A

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{y}\right)^y=e^\alpha,\qquad \alpha\in\mathbb{R},$$

határéték-formula alapján

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)=e^2\cdot 1=e^2.$$

3. a) Bázistranszformációval ellenőrizhető, hogy az $\mathbb{R}^4$ tér kanonikus bázisának vektorai kicserélhetőek az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$ vektorokkal, így bázist alkotnak az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, továbbá az $\underline{x}$ vektor előállítása ezen a bázison:

$$\underline{x}=2\underline{a}_1+\underline{a}_2+3\underline{a}_3-4\underline{a}_4. \tag{1}$$

   b) Például: $V_1:=\{\lambda_1\underline{a}_1+\lambda_2\underline{a}_2+\lambda_3\underline{a}_3|\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}\}$, $V_2:=\{\lambda\underline{a}_4|\lambda\in\mathbb{R}\}$. Ekkor $\dim(V_1)=3$, hiszen $B_1=\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3\}$ bázis V_1-ben, és $\dim(V_2)=1$, hiszen $B_2=\{\underline{a}_4\}$ bázis V_2-ben. Továbbá $\mathbb{R}^4=V_1\oplus V_2$, mert $\dim\left(\mathbb{R}^4\right)=\dim(V_1)+\dim(V_2)$ és $B=B_1\cup B_2$ bázis $\mathbb{R}^4$-ben.

   c) Például: $V_1:=\{\lambda_1\underline{a}_1+\lambda_2\underline{a}_2+\lambda_3\underline{a}_3|\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}\}$, $V_2:=\{\mu_1\underline{a}_3+\mu_2\underline{a}_4|\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}\}$. Itt $\dim(V_1)+\dim(V_2)\neq\dim\left(\mathbb{R}^4\right)$, így $\mathbb{R}^4\neq V_1\oplus V_2$. Mivel a V_1 és V_2 alterek bázisainak úniója generátorrendszer $\mathbb{R}^4$-ben, így minden $\mathbb{R}^4$-beli vektor előállítható V_1 és V_2-beli vektorok összegeként. Következésképpen $\mathbb{R}^4=V_1+V_2$. Az $\underline{x}$ vektor (1) előállítását figyelembe véve legyen $\underline{v}_1=2\underline{a}_1+\underline{a}_2+\underline{a}_3=(4,4,3,2)\in V_1$ és $\underline{v}_2=2\underline{a}_3-\underline{a}_4=(-2,2,0,0)\in V_2$, illetve legyen $\underline{v'}_1=2\underline{a}_1+\underline{a}_2+2\underline{a}_3=(5,5,3,2)\in V_1$ és $\underline{v'}_2=\underline{a}_3-\underline{a}_4=(-3,1,0,0)\in V_2$. Ekkor $\underline{x}=\underline{v}_1+\underline{v}_2$, illetve $\underline{x}=\underline{v'}_1+\underline{v'}_2$, tehát az $\underline{x}$ vektor felbontása a két altérbe eső összetevőkre nem egyértelmű.

4. a) Egyszerű mátrixszorzással ellenőrizhető, hogy $A\cdot A=A$, azaz az A mátrix idempotens.

   b) Felhasználva az $A\cdot B=A$ és $B\cdot A=B$ egyenlőségeket, továbbá a mátrixszorzás asszociativitását: $A\cdot A=(A\cdot B)\cdot A=A\cdot(B\cdot A)=A\cdot B=A$, tehát A idempotens.
   $B\cdot B=(B\cdot A)\cdot B=B\cdot(A\cdot B)=B\cdot A=B$, tehát B is idempotens.

5. Mivel minden permutáció felbontható transzpozíciók szorzatára, elegendő megmutatnunk, hogy minden S_4-beli transzpozíció előállítható a megadott $(1\ 2),(1\ 3)$ és $(1\ 4)$ transzpozíciók szorzataként. Ez pedig következik a

$$(2\ 3)=(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2),\qquad (2\ 4)=(1\ 2)(1\ 4)(1\ 2)\quad\text{és}\qquad (3\ 4)=(1\ 3)(1\ 4)(1\ 3)$$

azonosságokból.

6. a) Tegyük fel először, hogy ρ ekvivalenciareláció. Ekkor ρ reflexív, azaz $(a,a)\in\rho$ minden $a\in A$-ra, így $\omega_A\subseteq\rho$.
   Legyen $(a,b)\in\rho\rho^{-1}$. Ekkor létezik $c\in A$, hogy $(a,c)\in\rho$ és $(c,b)\in\rho^{-1}$, azaz $(b,c)\in\rho$. ρ szimmetrikus, ezért $(c,b)\in\rho$. De ekkor ρ tranzitivitása miatt $(a,c)\in\rho$ és $(c,b)\in\rho$-ból következik, hogy $(a,b)\in\rho$. Ezzel beláttuk, hogy $\rho\rho^{-1}\subseteq\rho$ teljesül.

b) Fordítva, tegyük fel, hogy $\omega_A \subseteq \rho$ és $\rho\rho^{-1} \subseteq \rho$ teljesül. Az $\omega_A \subseteq \rho$ tartalmazás miatt $(a,a) \in \rho$ minden $a \in A$-ra, azaz ρ reflexív.

Legyen $(a,b) \in \rho$. Ekkor $(b,a) \in \rho^{-1}$, és ρ reflexivitása miatt $(b,b) \in \rho$. De ekkor $(b,a) \in \rho\rho^{-1}$, és így a feltétel szerint $(b,a) \in \rho$, azaz ρ szimmetrikus.

Végül legyen $(a,b) \in \rho$ és $(b,c) \in \rho$. Mivel ρ szimmetrikus, ezért $(c,b) \in \rho$, azaz $(b,c) \in \rho^{-1}$. De ekkor $(a,c) \in \rho\rho^{-1}$, és így a feltétel szerint $(a,c) \in \rho$ is teljesül, azaz ρ tranzitív.