

Matematikai feladatmegoldó verseny 2008/09

5. forduló — megoldások

1. Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$$

végtelen sort. Mivel

$$\sqrt[n]{\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}} = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

ha $n \rightarrow \infty$, a Cauchy-féle kritérium szerint a fenti sor konvergens. A sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0.$$

2. A

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

azonosság felhasználásával kapjuk, hogy

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ezért

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1.$$

3. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$$

hatványsor középpontja $x_0 = 1$. Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

a hatványsor konvergenciasugara $r = 1$. Ezért a hatványsor abszolút konvergens a $(0, 2)$ intervallumban, és egy akárhányszor differenciálható

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad x \in (0, 2)$$

függvényt állít elő. Tagonkénti differenciálással kapjuk, hogy $x \in (0, 2)$ esetén

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{n-1} = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2-x}.$$

Innen

$$s(x) - s(1) = \int_1^x s'(t) dt = \int_1^x \frac{1}{2-t} dt = [-\ln(2-t)]_{t=1}^x = -\ln(2-x),$$

és

$$s(x) = s(1) - \ln(2 - x), \quad x \in (0, 2)$$

következik. Végül $s(1) = 0$ folytán

$$s(x) = -\ln(2 - x), \quad x \in (0, 2).$$

4. Vegyünk egy $2n$ elemű halmazt, amelynek elemeit jelölje $A = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$. A bizonyítandó azonosság bal oldalának kombinatorikai jelentése az, hogy az A halmazból hány különböző n -elemű részhalmaz választható ki. Az azonosság jobb oldalát pedig az $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ azonosságot felhasználva átalakíthatjuk:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

Ezt a kifejezést pedig tekinthetjük úgy, hogy az A halmaz n -elemű részhalmazait úgy számoljuk össze, hogy aszerint csoportosítjuk a részhalmazokat, hogy azokban k db elem az $x_1, \dots, x_n$ elemek közül, $n - k$ db pedig az $y_1, \dots, y_n$ elemek közül lesz kiválasztva.

5. A binomiális tétel szerint

$$\begin{aligned} (1+x)^n(1+y)^n(x+y)^n &= \left(\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} y^j \right) \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \binom{n}{i} \binom{n}{j} \binom{n}{k} x^{i+k} y^{n+j-k}. \end{aligned}$$

A fenti összegben $x^n y^n$ alakú tagokat $k = n - i$ és $j = n - i$ választással kapunk, így az $x^n y^n$ tag együtthatója

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i}^3.$$

6. Tekintsük az $x_n = \frac{1}{s_n}$ sorozatot. Ekkor a megadott rekurzív egyenlet reciprokát véve kapjuk, hogy x_n teljesíti az

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{3}$$

másodrendű homogén lineáris rekurziót. Ennek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 = 5\lambda - 6,$$

amelynek gyökei $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 3$. Ezért

$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^n.$$

A kezdeti feltételeket felhasználva

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ 2c_1 + 3c_2 &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

amelyből kapjuk, hogy $c_1 = \frac{8}{3}$ és $c_2 = -\frac{5}{3}$. Ezért $x_n = \frac{8}{3} 2^n - \frac{5}{3} 3^n$, azaz

$$s_n = \frac{3}{8 \cdot 2^n - 5 \cdot 3^n}.$$