Matematikai feladatmegoldó verseny 2008/09
4. forduló — megoldások

1. A forgástest térfogatának képlete szerint

$$V = \pi \int_0^1 \arcsin^2 x \; dx.$$

Az $x = \sin u$ helyettesítéssel

$$\int_0^1 \arcsin^2 x \; dx = \int_0^{\pi/2} u^2 \cos u \; du.$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int u^2 \cos u \; du = u^2 \sin u - 2 \int u \sin u \; du,$$

valamint

$$\int u \sin u \; du = -u \cos u + \int \cos u \; du = -u \cos u + \sin u + c.$$

Ezért

$$V = \pi \left[u^2 \sin u + 2u \cos u - 2 \sin u\right]_0^{\pi/2} = \pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right).$$

2. A definíció alapján

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \lim_{T \longrightarrow \infty} \int_0^T x^2 e^{-x^2} dx.$$

Az $u = -x^2$ helyettesítéssel

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + c = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c.$$

Ezt felhasználva parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int_0^T x^2 e^{-x^2} dx = \int_0^T x \cdot x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \cdot x\right]_0^T + + \frac{1}{2} \int_0^T e^{-x^2} dx = -\frac{T}{2e^{T^2}} + \frac{1}{2} \int_0^T e^{-x^2} dx.$$

A l'Hospital-szabály alkalmazásával

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{T}{e^{T^2}} = \lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{2T e^{T^2}} = 0,$$

és a Poisson-formula szerint

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} \int_0^T e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ezért

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \lim_{T \longrightarrow \infty} \left(-\frac{T}{2e^{T^2}} + \frac{1}{2} \int_0^T e^{-x^2} dx\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

3. a. Legyen $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges.
Ekkor:
$< \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} >= 1 \cdot (x_1 + y_1) \cdot z_1 + ... + n \cdot (x_n + y_n) \cdot z_n =$
$=1 \cdot x_1 \cdot z_1 + ... + n \cdot x_n \cdot z_n + 1 \cdot y_1 \cdot z_1 + ... + n \cdot y_n \cdot z_n =< \underline{x}, \underline{z} > + < \underline{y}, \underline{z} >,$

$< \lambda \cdot \underline{x}, \underline{y} >= 1 \cdot (\lambda \cdot x_1) \cdot y_1 + ... + n \cdot (\lambda \cdot x_n) \cdot y_n =$
$= \lambda \cdot (1 \cdot x_1 \cdot y_1 + ... + n \cdot x_n \cdot y_n) = \lambda \cdot < \underline{x}, \underline{y} >,$

$< \underline{x}, \underline{y} + \underline{z} >= 1 \cdot x_1(y_1 + z_1) + ... + n \cdot x_n(y_n + z_n) =$
$= 1 \cdot x_1 \cdot y_1 + ... + n \cdot x_n \cdot y_n + 1 \cdot x_1 \cdot z_1 + ... + n \cdot x_n \cdot z_n =< \underline{x}, \underline{y} > + < \underline{x}, \underline{z} >,$

$< \underline{x}, \lambda \underline{y} >= 1 \cdot x_1(\lambda y_1) + ... + n \cdot x_n(\lambda y_n) =$
$= \lambda \cdot (1 \cdot x_1 \cdot y_1 + ... + n \cdot x_n \cdot y_n) = \lambda \cdot < \underline{x}, \underline{y} >,$
tehát az értelmezett művelet bilineáris.

$$< \underline{x}, \underline{y} >= 1 \cdot x_1 \cdot y_1 + ... + n \cdot x_n \cdot y_n = 1 \cdot y_1 \cdot x_1 + ... + n \cdot y_n \cdot x_n =< \underline{y}, \underline{x} >,$$
tehát az értelmezett művelet szimmetrikus.

$< \underline{x}, \underline{x} >= 1 \cdot x_1^2 + ... + n \cdot x_n^2 \geq 0$
és
$< \underline{x}, \underline{x} >= 1 \cdot x_1^2 + ... + n \cdot x_n^2 = 0 \iff x_1 = ... = x_n = 0 \iff \underline{x} = \underline{0},$
tehát az értelmezett művelet pozitív definit.

b. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$-beli kanonikus bázis két vektorát: $\underline{e}_i$-t és $\underline{e}_j$-t $(i \neq j)$! Ekkor az értelmezett skaláris szorzattal:
$$< \underline{e}_i, \underline{e}_j >= i \cdot 1 \cdot 0 + j \cdot 0 \cdot 1 = 0,$$
így a kanonikus bázis páronként ortogonális, nullvektortól különböző vektorokból áll, tehát ortogonális vektorhalmaz.
Ugyanakkor:
$$\begin{aligned} \|\underline{e}_1\| &= \sqrt{< \underline{e}_1, \underline{e}_1 >} = 1, \\ \|\underline{e}_2\| &= \sqrt{< \underline{e}_2, \underline{e}_2 >} = \sqrt{2}, \\ &\vdots \\ \|\underline{e}_n\| &= \sqrt{< \underline{e}_n, \underline{e}_n >} = \sqrt{n}. \end{aligned}$$
A bázisvektorok ($\underline{e}_1$ kivételével) nem egységre normáltak, így a kanonikus bázis a megadott skaláris szorzatot alapul véve nem ortonormált.

c. Legyen $\underline{x} = (1, 2, 0, 3)$, $\underline{y} = (4, -1, 1, 2)$. Ekkor:
$$\begin{aligned} < \underline{x}, \underline{y} > &= 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \\ \|x\| &= \sqrt{< \underline{x}, \underline{x} >} = \sqrt{1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 3^2} = \sqrt{45} \\ \|y\| &= \sqrt{< \underline{y}, \underline{y} >} = \sqrt{1 \cdot 4^2 + 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2} = \sqrt{37} \end{aligned}$$
Ortonormált bázis $\mathbb{R}^4$-ben:
$$\begin{aligned} \underline{e}_1' &:= \frac{1}{\|\underline{e}_1\|} \cdot \underline{e}_1 = \underline{e}_1 = (1, 0, 0, 0) \\ \underline{e}_2' &:= \frac{1}{\|\underline{e}_2\|} \cdot \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0, 1, 0, 0) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) \\ \underline{e}_3' &:= \frac{1}{\|\underline{e}_3\|} \cdot \underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (0, 0, 1, 0) = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \\ \underline{e}_4' &:= \frac{1}{\|\underline{e}_4\|} \cdot \underline{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot (0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

4. Ha az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció injektív, akkor minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$(\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A})(\underline{x}) = \underline{x}. \qquad (*)$$

Legyen λ sajátértéke az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációnak és $\underline{v}$ legyen egy λ sajátértékű sajátvektor. Ekkor (a (*) azonosságot is felhasználva):

$$(\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A})(\underline{v}) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(\underline{v})) = \mathcal{A}^{-1}(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot (\mathcal{A}^{-1}(\underline{v})) = \underline{v},$$

így

$$\mathcal{A}^{-1}(\underline{v}) = 1/\lambda \cdot \underline{v}.$$

Tehát $1/\lambda$ sajátértéke az $\mathcal{A}^{-1}$ lineáris transzformációnak. Ugyancsak látható, hogy ha a $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor λ sajátértékű sajátvektora $\mathcal{A}$-nak, akkor $1/\lambda$ sajátértékű sajátvektora az $\mathcal{A}^{-1}$ transzformációnak, és fordítva.

Így az $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó sajátaltere megegyezik az $\mathcal{A}^{-1}$ transzformáció $1/\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátalterével:

$$H_{\mathcal{A}}(\lambda) = H_{\mathcal{A}^{-1}}(1/\lambda).$$

5. a) Legyen $w = a + bi + cj + dk$. A disztributivitást és az i, j, k szimbólumok szorzási szabályát használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
w\overline{w} &= (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\
&= a^2 + bai + caj + dak - abi - b^2i^2 - cbji - dbki - acj - bcij - c^2j^2 - dckj \\
&\quad -adk - bdik - cdjk - d^2k^2 \\
&= a^2 - b^2i^2 - cbji - dbki - bcij - c^2j^2 - dckj - bdik - cdjk - d^2k^2 \\
&= a^2 + b^2 + cbk - dbj - bck + c^2 + dci + bdj - cdi + d^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + d^2.
\end{aligned}$$

b) A szorzási szabályok alapján

$$\begin{aligned}
w_1w_2 &= (1 - i + 2j - k)(3 + 2i - j + 2k) \\
&= 3 - 3i + 6j - 3k + 2i - 2i^2 + 4ji - 2ki - j + ij - 2j^2 + kj + 2k - 2ik + 4jk - 2k^2 \\
&= 3 - 3i + 6j - 3k + 2i + 2 - 4k - 2j - j + k + 2 - i + 2k + 2j + 4i + 2 \\
&= 9 + 2i + 5j - 4k,
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
w_2w_1 &= (3 + 2i - j + 2k)(1 - i + 2j - k) \\
&= 3 + 2i - j + 2k - 3i - 2i^2 + ji - 2ki + 6j + 4ij - 2j^2 + 4kj - 3k - 2ik + jk - 2k^2 \\
&= 3 + 2i - j + 2k - 3i + 2 - k - 2j + 6j + 4k + 2 - 4i - 3k + 2j + i + 2 \\
&= 9 - 4i + 5j + 2k.
\end{aligned}$$

A fenti példa szerint $w_1w_2 \neq w_2w_1$, így a kvaterniók szorzása nem kommutatív művelet.

Az a) pontból következik, hogy $w\frac{\overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = 1$, és az a) ponthoz hasonló módon belátható, hogy $w \cdot \overline{w} = \overline{w} \cdot w$, így $\frac{\overline{w}}{w \cdot \overline{w}}w = 1$. Ezért a kvaterniók inverze jól definiált, és

$$w^{-1} = \frac{\overline{w}}{w \cdot \overline{w}}.$$

Ennek megfelelően

$$w_2^{-1} = \frac{\overline{w_2}}{w_2\overline{w_2}} = \frac{3 - 2i + j - 2k}{3^2 + (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \frac{3}{18} - \frac{2}{18}i + \frac{1}{18}j - \frac{2}{18}k.$$

Mivel a szorzás nem kommutatív, a $\frac{w_1}{w_2}$ jelölés nem jól definiált: ezt lehet a $w_1 \cdot w_2^{-1}$ vagy a $w_2^{-1} \cdot w_1$ szorzattal is értelmezni, de ahogy az alábbi számolás mutatja, két különböző eredményt kapunk:

$$\begin{aligned}
w_1 w_2^{-1} &= (1-i+2j-k)\left(\frac{3}{18}-\frac{2}{18}i+\frac{1}{18}j-\frac{2}{18}k\right)\\
&= \frac{3}{18}-\frac{2}{18}i+\frac{1}{18}j-\frac{2}{18}k-\frac{3}{18}i+\frac{2}{18}i^2-\frac{1}{18}ij+\frac{2}{18}ik+\frac{6}{18}j-\frac{4}{18}ji+\frac{2}{18}j^2-\frac{4}{18}jk\\
&\quad -\frac{3}{18}k+\frac{2}{18}ki-\frac{1}{18}kj+\frac{2}{18}k^2\\
&= \frac{3}{18}-\frac{2}{18}i+\frac{1}{18}j-\frac{2}{18}k-\frac{3}{18}i-\frac{2}{18}-\frac{1}{18}k-\frac{2}{18}j+\frac{6}{18}j+\frac{4}{18}k-\frac{2}{18}-\frac{4}{18}i\\
&\quad -\frac{3}{18}k+\frac{2}{18}j+\frac{1}{18}i-\frac{2}{18}\\
&= -\frac{3}{18}-\frac{8}{18}i+\frac{7}{18}j-\frac{2}{18}k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2^{-1} w_1 &= \left(\frac{3}{18}-\frac{2}{18}i+\frac{1}{18}j-\frac{2}{18}k\right)(1-i+2j-k)\\
&= \frac{3}{18}-\frac{2}{18}i+\frac{1}{18}j-\frac{2}{18}k-\frac{3}{18}i+\frac{2}{18}i^2-\frac{1}{18}ji+\frac{2}{18}ki+\frac{6}{18}j-\frac{4}{18}ij+\frac{2}{18}j^2-\frac{4}{18}kj\\
&\quad -\frac{3}{18}k+\frac{2}{18}ik-\frac{1}{18}jk+\frac{2}{18}k^2\\
&= \frac{3}{18}-\frac{2}{18}i+\frac{1}{18}j-\frac{2}{18}k-\frac{3}{18}i-\frac{2}{18}+\frac{1}{18}k+\frac{2}{18}j+\frac{6}{18}j-\frac{4}{18}k-\frac{2}{18}+\frac{4}{18}i\\
&\quad -\frac{3}{18}k-\frac{2}{18}j-\frac{1}{18}i-\frac{2}{18}\\
&= -\frac{3}{18}-\frac{2}{18}i+\frac{7}{18}j-\frac{8}{18}k.
\end{aligned}$$

6. Az $1, 2, 3, \ldots, 2n$ számok közül válasszunk ki $n+1$ db számot. Jelölje ezeket $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Írjuk fel az a_i számot $a_i = 2^{m_i} b_i$ alakban, ahol b_i páratlan egész szám $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$. Ekkor $b_1, \ldots, b_{n+1}$ az n elemű $\{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$ halmaz elemei. De így a skatulya-elv szerint a $b_1, \ldots, b_{n+1}$ számok között van legalább két egyforma szám. Legyen például $b_j = b_k$. Ekkor $a_j | a_k$, ha $m_j \leq m_k$, illetve $a_k | a_j$, ha $m_k \leq m_j$.