

Matematikai feladatmegoldó verseny 2008/09

1. forduló — megoldások

1. a. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített.

$a_n \rightarrow a$ miatt van olyan $k_1 \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n > k_1$ esetén $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \dots + (a_n - a)}{n} \right| \\
 &\leq \frac{|a_1 - a| + \dots + |a_n - a|}{n} \\
 &= \frac{|a_1 - a| + \dots + |a_{k_1} - a|}{n} + \frac{|a_{k_1+1} - a| + \dots + |a_n - a|}{n} \\
 &< \frac{|a_1 - a| + \dots + |a_{k_1} - a|}{n} + \frac{n - k_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\leq \frac{|a_1 - a| + \dots + |a_{k_1} - a|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > k_1.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_1 - a| + \dots + |a_{k_1} - a|}{n} = 0,$$

ezért van olyan $k_2 \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n > k_2$ esetén

$$\frac{|a_1 - a| + \dots + |a_{k_1} - a|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Az (1) és a (2) mutatja, hogy bármely $n > \max(k_1, k_2)$ esetén

$$\left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a \right| < \varepsilon.$$

- b. Legyen $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Ebből következik, hogy $n \geq 1$ esetén

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a_n \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

Az a_1 a feltétel szerint $\geq \sqrt{2}$.

A sorozat csökkenésének az igazolása:

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} &\leq \frac{a_n^2 + a_n^2}{2a_n} = a_n, \quad n \geq 1 \\
 &\uparrow \\
 2 &\leq a_n^2
 \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy a sorozat konvergens. Legyen $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Az

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$$

egyenlet mindkét oldalának határértékét véve kapjuk, hogy

$$a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right),$$

amiből következik, hogy $a^2 = 2$, és így $a = \sqrt{2}$ (mivel $a_n > 0$).

- 3 a. A felcserélési tétel és a skaláris szorzás kommutativitása miatt:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = k \quad (\text{konstans}).$$

Így:

$$\text{az } \underline{a}' = \frac{1}{k} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) \text{ vektor merőleges } \underline{b}\text{-re és } \underline{c}\text{-re, továbbá } \underline{a} \cdot \underline{a}' = 1,$$

$$\text{a } \underline{b}' = \frac{1}{k} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) \text{ vektor merőleges } \underline{c}\text{-re és } \underline{a}\text{-ra, továbbá } \underline{b} \cdot \underline{b}' = 1,$$

$$\text{a } \underline{c}' = \frac{1}{k} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) \text{ vektor merőleges } \underline{a}\text{-ra és } \underline{b}\text{-re, továbbá } \underline{c} \cdot \underline{c}' = 1.$$

b. $\underline{b} \times \underline{c} = (1, 1, 1) \times (0, 4, 5) = (1, -5, 4)$

$$k = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = -10$$

$$\underline{a}' = -\frac{1}{10} \cdot (1, -5, 4) = \left(-\frac{1}{10}, \frac{5}{10}, -\frac{4}{10}\right)$$

$$\underline{c} \times \underline{a} = (0, 4, 5) \times (2, 0, -3) = (-12, 10, -8)$$

$$\underline{b}' = -\frac{1}{10} \cdot (-12, 10, -8) = \left(\frac{12}{10}, -1, \frac{8}{10}\right)$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (2, 0, -3) \times (1, 1, 1) = (3, -5, 2)$$

$$\underline{c}' = -\frac{1}{10} \cdot (3, -5, 2) = \left(-\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, -\frac{2}{10}\right).$$

4. a. Legyen az e és f egyenesekre illeszkedő sík S_1 . Ennek egy pontja az e egyenesre illeszkedő $P_0 = (-6, 0, 6)$ pont, normálvektora: $\underline{n}_1 = \underline{v}_e \times \underline{v}_f = (-3, 0, 2) \times (0, 5, -2) = (-10, -6, -15)$. Így az S_1 sík egyenlete:

$$-10(x + 6) - 6(y - 0) - 15(z - 6) = 0,$$

azaz

$$10x + 6y + 15z = 30.$$

Legyen a g és h egyenesekre illeszkedő sík S_2 . Ennek egy pontja a g egyenesre illeszkedő $Q_0 = (-3, 5, 2)$ pont, normálvektora: $\underline{n}_2 = \underline{v}_g \times \underline{v}_h = (6, 0, -4) \times (0, 10, -4) = (40, 24, 60)$.

Így az S_2 sík egyenlete:

$$40(x + 3) + 24(y - 5) + 60(z - 2) = 0,$$

azaz

$$10x + 6y + 15z = 30.$$

Az S_1 és S_2 síkok egyenlete azonos, így a négy egyenes egy síkban helyezkedik el, melynek egyenlete:

$$10x + 6y + 15z = 30.$$

- b. Az egyenesek kölcsönös helyzetét vizsgálva megállapítható, hogy az e és g illetve az f és h egyenesek párhuzamosak, így az egyenesek metszéspontjai által meghatározott alakzat paralelogramma.

$$\text{Az } e \text{ és } f \text{ egyenesek metszéspontja: } M_1 = (0, 0, 2),$$

$$\text{az } e \text{ és } h \text{ egyenesek metszéspontja: } M_2 = (3, 0, 0),$$

$$\text{az } f \text{ és } g \text{ egyenesek metszéspontja: } M_3 = (0, 5, 0).$$

A paralelogramma területe egyenlő az $\overrightarrow{M_1M_2}$ és $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorok vektorális szorzatának abszolútértékével:

$$t = \left| \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \right| = |(3, 0, -2) \times (0, 5, -2)| = |(10, 6, 15)| = \sqrt{100 + 36 + 225} = 19.$$

5. Legyen $x \in (A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)$. Ekkor vagy (1. eset) $x \in A_1 \cup A_2$ és $x \notin B_1 \cup B_2$ vagy (2. eset) $x \in B_1 \cup B_2$ és $x \notin A_1 \cup A_2$.

Tekintsük az 1. esetet: Ekkor $(x \in A_1 \text{ vagy } x \in A_2)$ és $(x \notin B_1 \text{ és } x \notin B_2)$. Azaz, vagy $(x \in A_1 \text{ és } x \notin B_1)$ vagy $(x \in A_2 \text{ és } x \notin B_2)$. Ez pedig azt jelenti, hogy $x \in (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

A 2. esetben ugyanígy indokolható, hogy $x \in (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

6. Az

$$(1\,2\,5\,6)^{10} = \left((1\,2\,5\,6)^4\right)^2 (1\,2\,5\,6)^2 = (1\,2\,5\,6)^2 = (1\,5)(2\,6),$$

$$(2\,3\,4)^7 = \left((2\,3\,4)^3\right)^2 (2\,3\,4) = (2\,3\,4)$$

és az

$$\left((3\,4\,7)(3\,5\,6)\right)^{-1} = (3\,5\,6)^{-1}(3\,4\,7)^{-1} = (6\,5\,3)(7\,4\,3)$$

azonosságokat alkalmazva az egyenletet átírhatjuk az

$$(1\,5)(2\,6)(2\,3\,4)\sigma^{-1}(6\,5\,3)(7\,4\,3) = id$$

alakba, amiből az egyes permutációk inverzével lépésenként az egyenletet balról beszorozva kapjuk, hogy

$$(2\,6)(2\,3\,4)\sigma^{-1}(6\,5\,3)(7\,4\,3) = (1\,5)^{-1},$$

és így

$$(2\,3\,4)\sigma^{-1}(6\,5\,3)(7\,4\,3) = (2\,6)^{-1}(1\,5)^{-1},$$

végül

$$\sigma^{-1}(6\,5\,3)(7\,4\,3) = (2\,3\,4)^{-1}(2\,6)^{-1}(1\,5)^{-1}.$$

Most jobbról szorozva az egyes permutációk inverzével kapjuk, hogy

$$\sigma^{-1}(6\,5\,3) = (2\,3\,4)^{-1}(2\,6)^{-1}(1\,5)^{-1}(7\,4\,3)^{-1},$$

és végül

$$\sigma^{-1} = (2\,3\,4)^{-1}(2\,6)^{-1}(1\,5)^{-1}(7\,4\,3)^{-1}(6\,5\,3)^{-1}.$$

Tehát

$$\sigma^{-1} = (4\,3\,2)(6\,2)(5\,1)(3\,4\,7)(3\,5\,6) = (2\,7\,5\,1\,6),$$

és így

$$\sigma = (6\,1\,5\,7\,2) = (1\,5\,7\,2\,6).$$