# PANNON EGYETEM

## MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR

### MATEMATIKAI ÉS SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK

## MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY
## 4. FORDULÓ

**1. feladat:**

Számítsa ki annak a testnek a térfogatát, amely az

$$f(x) = \arcsin x, \qquad x \in [0,1]$$

függvény $x$ tengely körüli megforgatásával keletkezik!

10 pont

**2. feladat:**

Az

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Poisson-integrál segítségével számítsa ki az

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$$

improprius integrált!

10 pont

**3. feladat:**

$\mathbb{R}^n$-ben két vektor skaláris szorzata az alábbi módon is definiálható:

$$<\underline{x}, \underline{y}> := 1 \cdot x_1 \cdot y_1 + 2 \cdot x_2 \cdot y_2 + \ldots + n \cdot x_n \cdot y_n$$

a. Igazolja, hogy a fenti módon értelmezett skaláris szorzatra teljesülnek a skaláris szorzat alaptulajdonságai (bilineáris, szimmetrikus, pozitív definit)!

b. Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^n$-ben a fenti skaláris szorzatot használva a kanonikus bázis ortogonális, illetve ortonormált?

c. Tekintsük $\mathbb{R}^4$-ben a fenti skaláris szorzatot! Legyen $\underline{x} = (1, 2, 0, 3)$ és $\underline{y} = (4, -1, 1, 2)$. Adja meg az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ skaláris szorzatát, továbbá az $\underline{x}$ és az $\underline{y}$ vektorok normáját! Adjon példát egy ortonormált bázisra az $\mathbb{R}^4$-ben!

10 pont

**4. feladat:**

Igazolja, hogy ha az $\boldsymbol{A}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció injektív, továbbá $\lambda$ sajátértéke $\boldsymbol{A}$–nak, akkor $1/\lambda$ sajátértéke az $\boldsymbol{A}^{-1}$ lineáris transzformációnak! Mit állíthatunk az $\boldsymbol{A}$ transzformáció $\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátalterének és az $\boldsymbol{A}^{-1}$ transzformáció $1/\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátalterének kapcsolatáról?

10 pont

**5. feladat:**

A $w = a + bi + cj + dk$ alakú számokat, ahol *a, b, c, d* valós számok, kvaternióknak hívjuk. A *w* kvaternió konjugáltját a $\overline{w} = a - bi - cj - dk$ képlettel definiáljuk. A kvaterniók összeadást a komplex számokhoz hasonló módon definiáljuk, a szorzást a

| $\cdot$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $i$ | $j$ | $k$ |
| $i$ | $i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ |
| $j$ | $j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ |
| $k$ | $k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ |

művelettáblában definiált értékek és a disztributivitás segítségével definiáljuk (a komplex számokhoz hasonló módon).

a) Igazolja a $w\overline{w} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ azonosságot!

b) Legyen $w_1=1-i+2j-k$ és $w_2=3+2i-j+2k$. Számítsa ki a $w_1\ w_2$ és $w_2\ w_1$ szorzatokat, valamint a $\frac{w_1}{w_2}$ hányadost!

10 pont

**6. feladat:**

Az 1, 2, 3,…,2n egész számok közül válasszunk ki tetszőleges n+1 darab számot. Mutassuk meg, hogy a kiválasztott számok között mindig van két olyan szám, hogy az egyik osztója a másiknak.

10 pont

**Beadási határidő: 2009. március 16.**

**Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!**