PANNON EGYETEM
MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR
MATEMATIKAI ÉS SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK

MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY
3. FORDULÓ

1. feladat:

Bizonyítsa be a $2x \cdot \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ egyenlőtlenséget!

10 pont

2. feladat:

Határozza meg az 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, …, $\sqrt[n]{n}$, … végtelen sorozat legnagyobb tagját függvényvizsgálat segítségével!

10 pont

3. feladat:

Legyen

$$A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \ldots,$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ & & & & . & & & & & \\ & & & & & . & & & & \\ & & & & & & . & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{n \times n}, \ \ldots, \ n \geq 3, \text{ továbbá } d_n = \det(A_n) \,.$$

Fejezze ki d_{n+1} értékét d_n és d_{n-1} segítségével!

Útmutatás: d_{n+1} számolásánál használjuk az utolsó oszlop szerinti kifejtést!

10 pont

4. feladat:

Tekintsük az alábbi bázistranszformációs táblázatot:

bázis	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$
$\underline{a}_4$	1	0	0	1	2	3
$\underline{e}_2$	0	0	0	0	0	0
$\underline{a}_3$	3	0	1	0	1	4
$\underline{a}_2$	-1	1	0	0	1	2

a) Adjon meg egy olyan lineáris egyenletrendszert, amelynek a megoldása során a fenti táblázathoz juthatunk!

b) Írja fel az egyenletrendszer megoldáshalmazát!

c) Igazolja, hogy a felírt egyenletrendszer homogén párjának megoldáshalmaza altér $\mathbb{R}^5$-ben és ennek az altérnek a dimenziója 2!

10 pont

5. feladat:

Adjon meg egy olyan $F = F(A, B)$ logikai formulát, amelyre az

$$((F \wedge B) \to (\neg A)) \to ((A \to (\neg B)) \to F)$$

logikai formula tautológia lesz.

10 pont

6. feladat:

Legyen $\varepsilon \neq 1$ egy komplex n-edik egységgyök. Mivel egyenlő a

$$\sum_{k=1}^{n} k\varepsilon^{k-1}$$

összeg?

10 pont

Beadási határidő: 2009. február 2.

Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!