



**PANNON EGYETEM**  
**MŰSZAKI INFORMATIKAI KAR**  
**MATEMATIKAI ÉS SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TANSZÉK**

**MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ VERSENY**

**2. FORDULÓ**

**1. feladat:**

Számítsa ki a

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - \frac{1}{\sqrt{3x+4}}}{\sqrt[3]{x+1}}$$

határértéket (amennyiben az létezik)!

10 pont

**2. feladat:**

Adjon példát olyan  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvényre, amelyre

a) az  $f$ -nek nincs határértéke a  $\infty$ -ben, de  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , de az  $f'$ -nek nincs határértéke a  $\infty$ -ben.

10 pont

**3. feladat:**

a) Legyenek  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ .

Igazolja, hogy a  $V = \{\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$  vektorhalmaz altér  $\mathbb{R}^n$ -ben! Mikor lesz  $\dim(V) = k$ , illetve  $\dim(V) < k$ ?

b) Legyen  $V = \{\lambda_1(1, 0, -2) + \lambda_2(1, 1, 1) + \lambda_3(5, 2, -4) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$ . Hány dimenziós a  $V$  altér? Adjon meg olyan  $V_2$  alteret, hogy  $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$  teljesüljön!

10 pont

**4. feladat:**

- a) A  $B$   $n \times n$ -es mátrixot az  $A$   $n \times n$ -es mátrixhoz hasonlónak nevezzük, ha létezik olyan  $X$   $n \times n$ -es mátrix, melyre  $B = X \cdot A \cdot X^{-1}$ . Jelölés  $A \approx B$ . Igazolja, hogy a fent definiált mátrixhasonlóság ekvivalenciareláció!
- b) Legyen az  $A$   $n \times n$ -es mátrix invertálható, továbbá legyen  $A \approx B$ . Mutassa meg, hogy a  $B$  mátrix is invertálható, továbbá hogy  $A^{-1} \approx B^{-1}$ !

10 pont

**5. feladat:**

Tekintsük a  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 7 & 6 & 2 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in S_9$  permutációt, és a segítségével definiáljunk az  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  halmazon egy  $\rho$  relációt a következőképpen:

$n \rho m$ , ha van olyan  $k$  egész szám, hogy  $n \sigma^k = m$ .

Mutassa meg, hogy  $\rho$  ekvivalenciareláció, és adja meg  $\rho$  ekvivalenciosztályait!

10 pont

**6. feladat:**

Mutassa meg, hogy a  $[0,1]$ -en definiált összes valós függvény halmazának számossága nagyobb, mint kontinuum!

10 pont

**Beadási határidő: 2008. december 1.**

**Kérjük, hogy a beadott lapokon nyomtatott betűkkel a nevet, szakot, Neptun kódot tüntessék fel!**