

A "Gyökközelítés intervallumfelezéssel" módszerre kidolgozott példákat találunk [1] könyvemben és a [2] honlapomon. Ez a fájl egy fontos feltételre kívánja a figyelmet felhívni: a magyarázat és a tanulság a két számolás után található.

Megoldandó egyenlet: $\tan(x) = x + 1$ azaz $g(x) = x + 1 - \tan(x) = 0$ ahol $0 < x < 3$.

I. lehetséges számolás: kezdő intervallum $a_{\text{I}} = 1.1$, $b_{\text{I}} = 1.5$.

II. lehetséges számolás: kezdő intervallum $a_{\text{II}} = 1.2$, $b_{\text{II}} = 1.6$.

A számításokat a [3] programmal végeztük, 10 lépés után mindkét számolás hibája $\varepsilon < \frac{b-a}{2^n} < 0.000391$, a részletszámítások a következő oldalon vannak.

Most jön a **meglepetés**: az I. számolás közelítő értéke $x_{\text{I}}^* \approx 1.132227$, a II. számolás végeredménye pedig $x_{\text{II}}^* \approx 1.570898$.

Ez miért baj? Ha a módszer nagyon gyors és nagyon pontos, akkor miért baj, ha a kezdeti intervallumot kicsit (0.1 -del) megváltoztatjuk?

Mert: ha mindkét számolás hibája $\varepsilon < 0.0004$, akkor a két gyök különbsége *nem lehet* $|x_{\text{I}}^* - x_{\text{II}}^*| \approx 0.438671$, ugyanis a *tangens* függvény a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumban konvex, a $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ intervallumban negatív, vagyis csak *egyetlen* metszéspontja lehet az $x + 1$ egyenessel!

Magyarázat: A II. számolás számértékeit tanulmányozva feltűnhet, hogy az $f(x)$ függvény értékei $\pm\infty$ "körül" ugrándoznak! Ha még alaposabban belegondolunk a két számolás kezdő intervallumába: $a_{\text{I}} = 1.1$, $b_{\text{I}} = 1.5$ illetve $a_{\text{II}} = 1.2$, $b_{\text{II}} = 1.6$, akkor rájöhethetünk a "csel"-re: $\frac{\pi}{2} \approx 1.571 \in [a_{\text{II}}, b_{\text{II}}]$ míg $\frac{\pi}{2} \notin [a_{\text{I}}, b_{\text{I}}]$. Ez pedig azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény *nem folytonos* az $[a_{\text{II}}, b_{\text{II}}]$ intervallumban, márpedig ez nyilván egy (nagyon) fontos szükséges feltétel! A II. számolás még alaposabb elemzése után még azt is észrevehetjük, hogy $x_{\text{II}}^* \approx 1.570898 \approx \frac{\pi}{2} \approx 1.570796$, és így, a következő oldal ábrája alapján már minden világos!

Tanulság: A kezdő $[a, b]$ zárt intervallumon az $f(x)$ függvénynek "végig" *folytonosnak* kell lennie!

2018.12.15.

Szalkai István,

SZALKAI@ALMOS.UNI-PANNON.HU

Hivatkozások:

[1] **Szalkai István, Mikó Teréz:** *Matematikai analízis I.*, Segédanyag a "Közgazdaságtan matematikai alapjai" tárgyhoz, 2011.

<https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Anal-Tk1B-d-180125.pdf>

[2] **Szalkai István:** *Gyökközelítés intervallumfelezéssel*, előadás-diák,

<https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/P01b-orozslan.ppt>

[3] **Szalkai István:** *Intervallumfelező oktatóprogram*,

<https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Interv3.exe>

I. számítás: Kezdő intervallum végpontjai: $a= 1.100000$, $b= 1.500000$,

lépésszám: $k = 10$, $f(a) = 0.135240$, $f(b) = -11.601420$

$n = 1,$	$x(1)=1.300000,$	$f(x1) = -1.302102 \Rightarrow x^* \in [1.100000 ; 1.300000]$
$n = 2,$	$x(2)=1.200000,$	$f(x2) = -0.372152 \Rightarrow x^* \in [1.100000 ; 1.200000]$
$n = 3,$	$x(3)=1.150000,$	$f(x3) = -0.084497 \Rightarrow x^* \in [1.100000 ; 1.150000]$
$n = 4,$	$x(4)=1.125000,$	$f(x4) = 0.032429 \Rightarrow x^* \in [1.125000 ; 1.150000]$
$n = 5,$	$x(5)=1.137500,$	$f(x5) = -0.024117 \Rightarrow x^* \in [1.125000 ; 1.137500]$
$n = 6,$	$x(6)=1.131250,$	$f(x6) = 0.004615 \Rightarrow x^* \in [1.131250 ; 1.137500]$
$n = 7,$	$x(7)=1.134375,$	$f(x7) = -0.009634 \Rightarrow x^* \in [1.131250 ; 1.134375]$
$n = 8,$	$x(8)=1.132813,$	$f(x8) = -0.002480 \Rightarrow x^* \in [1.131250 ; 1.132813]$
$n = 9,$	$x(9)=1.132031,$	$f(x9) = 0.001074 \Rightarrow x^* \in [1.132031 ; 1.132813]$
$n=10,$	$x(10)=1.132422,$	$f(x10) = -0.000701 \Rightarrow x^* \in [1.132031 ; 1.132422]$

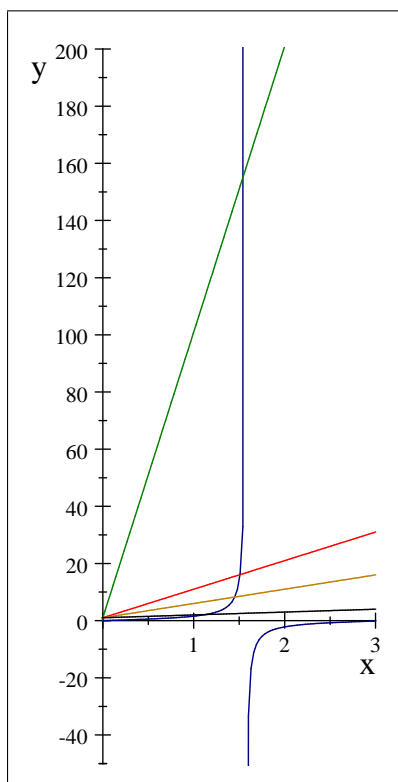
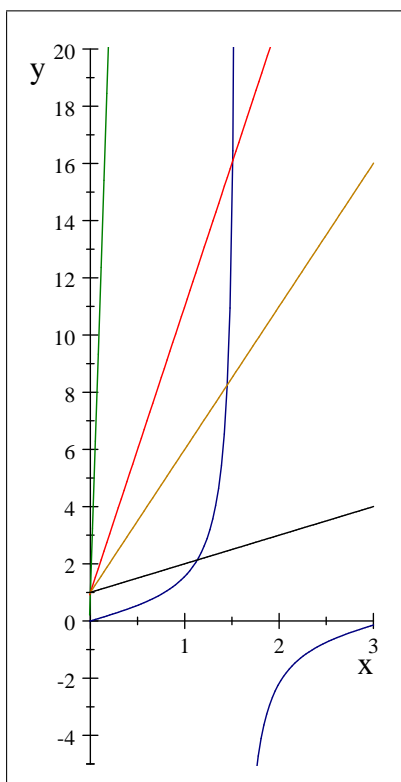
$\Rightarrow x^* \approx 1.132227$, $\varepsilon < 0.000391$

II. számítás: Kezdő intervallum végpontjai: $a= 1.200000$, $b= 1.600000$,

lépésszám: $k = 10$, $f(a) = -0.372152$; $f(b) = 36.832533$

$n = 1,$	$x(1)=1.400000,$	$f(x1) = -3.397884 \Rightarrow x^* \in [1.400000 ; 1.600000]$
$n = 2,$	$x(2)=1.500000,$	$f(x2) = -11.601420 \Rightarrow x^* \in [1.500000 ; 1.600000]$
$n = 3,$	$x(3)=1.550000,$	$f(x3) = -45.528482 \Rightarrow x^* \in [1.550000 ; 1.600000]$
$n = 4,$	$x(4)=1.575000,$	$f(x4) = 240.460787 \Rightarrow x^* \in [1.550000 ; 1.575000]$
$n = 5,$	$x(5)=1.562500,$	$f(x5) = -117.970006 \Rightarrow x^* \in [1.562500 ; 1.575000]$
$n = 6,$	$x(6)=1.568750,$	$f(x6) = -486.111067 \Rightarrow x^* \in [1.568750 ; 1.575000]$
$n = 7,$	$x(7)=1.571875,$	$f(x7) = 929.636353 \Rightarrow x^* \in [1.568750 ; 1.571875]$
$n = 8,$	$x(8)=1.570313,$	$f(x8) = -2064.284877 \Rightarrow x^* \in [1.570313 ; 1.571875]$
$n = 9,$	$x(9)=1.571094,$	$f(x9) = 3364.783434 \Rightarrow x^* \in [1.570313 ; 1.571094]$
$n=10,$	$x(10)=1.570703,$	$f(x10) = -10726.836367 \Rightarrow x^* \in [1.570703 ; 1.571094]$

$\Rightarrow x^* \approx 1.570898$, $\varepsilon < 0.000391$



$$\tan(x) = 100x + 1 = 10x + 1 = 5x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \lambda x + 1 - \tan(x) ,$$