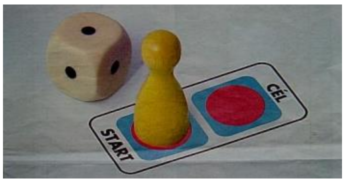


Mesék a valószínűségszámításból

Szalkai István, Veszprém
szalkai@almos.uni-pannon.hu

Néhány klasszikus feladatot jókedvű mesébe burkoltunk, így a tapasztalatok szerint a diákok veszik a lapot, matekórán még nevetni is szoktak. A feladatokat témák szerint csoportosítottuk, nem feltétlenül az elején vannak az érdekesek és a végén az unalmasak. Hamarosan közzétesszük a megoldásokat is.

Köszönet *Tarján Klára* és *Orbán Éva* kolléganőimnek az ötletekért!

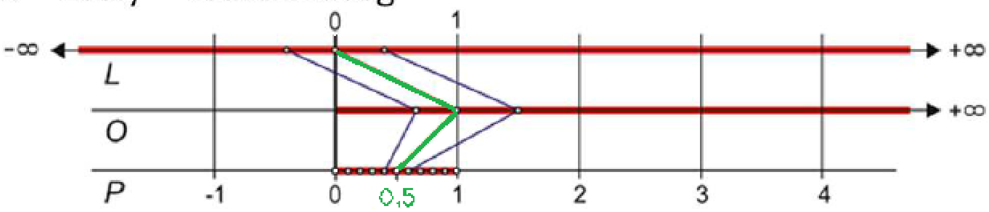
Bár az legtöbb matematikai könyvben, cikkben, és a tanórákon az "**esély**" szó a "valószínűség" szinonimája, az egészségügyi statisztikában, és még sok másutt nem az (lásd például [wiki-Odds]) :

Esély (O - odds): „hányszor akkora a valószínűsége annak, hogy az esemény bekövetkezik, mint annak, hogy nem következik be"

$$O(A) = \frac{P(A)}{1 - P(A)}$$

Logit (L): esély természetes alapú logaritmusa $\quad l(A) = \ln(O(A))$

Logit – Esély – Valószínűség



Tartalom:

Eseményalgebra, elemi feladatok

(E1) Jelölje A azt az eseményt hogy a *meleg*, míg B azt hogy *hideg* csapot nyitottuk meg.
a) Mit jelent $A+B$ illetve $A \cdot B$?
b) Írja le A és B közötti műveletekkel azt, hogy *tűzforró*, *megtelt a kád*, *üres*, *langyos*, ...
c) Jelölje C azt, hogy a *lefolyódugót* is kihúztuk. Folytassa.

(E2) Három vadász 0.7, 0.5 illetve 0.9 valószínűséggel találja el a vadat. Mekkora esélye van a disznónak?

(E3) Egy hallgató két helyre adja be pályázatát, ahol egymástól függetlenül 0,4 - 0,4 valószínűséggel utasítják el. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik pályázatát elfogadják?

(E4) A *Catan telepesei* játékban miért kisebb pár számkártya (például 2 és 11) , azaz állítólag kisebb valószínűségű a két kocka összege? (Lásd még az (E20) feladatot is.)

(E5) a) Ha a fiúk és a lányok születéseinek valószínűsége p ill. $q=1-p$, egymástól (és az apától is) függetlenül, akkor egy kétgyermekes családban melyiknek nagyobb a valószínűsége: *azonos* vagy *különböző* neműek a gyermekek?
b) Mi a helyzet a háromgyermekes családokban, ha $p=0.51$ és $q=0.49$?
(Lásd még a (B7) feladatot is.)

(E6) Az *5-fabatkás* pénzérme $p=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ valószínűséggel fej, míg $1-p$ valószínűséggel írás.
a) Az érmét háromszor feldobva mekkora valószínűséggel lesz a három dobás azonos (csak 3 fej vagy csak 3 írás) ?
b) Kétszer feldobva mekkora valószínűséggel kapunk egy fej és egy írást? (Sorrend nem számít!)

(E7) Tegyük fel. hogy minden héten a beérkezett érvényes lottószelvények száma 2 millió. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 egymás utáni héten át *nincs* öttalálatos lottószelvény ?

(E8) Egy kísérletnél azt tapasztalták, hogy annak a valószínűsége, hogy egy állat vírusfertőzésben megbetegszik 0,1. Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: 20 állatból legfeljebb 2 betegszik meg, vagy 10 állatból legfeljebb 1 betegszik meg, ha az állatok egymástól függetlenül betegszenek meg?

(E9) *Tegyük fel*, hogy az év 365 napján ugyanolyan valószínűséggel születnek az emberek.
a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 4 tetszőlegesen kiválasztott ember közül mindenkinek *más* napon van a születésnapja ?
b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 3 embernek *ugyanazon* a napon van a születésnapja ?

KÉTSZER DUPLA SZÜLINAP

A történet nem mindennapos: négy év különbséggel, ugyanazon a napon adott életet egy-egy ikerpárnak egy angliai anya. Mindkét alkalommal természetes úton esett teherbe fiaival. Mindkét ikerpár kétpetéjű, ami tovább növeli az eset ritkaságát. Matematikusok szerint ennek mindössze 1:500 000-hez az esélye. *Kim Hafer* 2008. július 18-án szülte meg az első ikerpárt, *Tristant* és *Blake-et*, akiknek kistestvért szerettek volna a szülők. Leginkább lányt és főleg csak egyet. Nagy volt a meglepetés, amikor kiderült, hogy Kim ismét ikrekkel terhes, akik szintén kétpetéjűek, és ismét mindketten fiúk. Az asszony magas vérnyomása miatt a szülés a számítottnál két héttel előbb megindult, így Devon és Logan nem késlekedett, hanem pont bátyjaik születésnapjára érkeztek. Ez a négyes szülinap nem lesz éppen olcsó mulatság a szülőknek...

Napló, 2007.okt.12.

Minden Cotton gyerek egy napon született

Marysville *(mti)* – Nem nehéz megjegyeznie gyerekei születésnapját egy szülői párosnak az Egyesült Államokban: immár harmadik porontyuk született október 2-án.

Cottonék – *Jenna és William Cotton* – 2007. október 2-án egy lánnyal szaporodtak, 2003 és 2006 októberének második napján pedig egy-egy fiúval.

Az Ohio Egyetem statisztikaprofesszora szerint annak az esélye, hogy egy háromgyermekes családban mindegyik utód más-más év ugyanazon napján lássa meg a napvilágot, egy a 133 ezerhez.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 23 ember között *van kettő*, akinek *ugyanazon* a napon van a születésnapja ?
d) Legalább hány tagú társaság esetén mondhatjuk ki 99% valószínűséggel, hogy *van kettő*, akinek *ugyanazon* a napon van a születésnapja ? (Lásd még az (E17) feladatot is.)

(E10) Egy 31 fős osztályban a szokásos módon akarják egymást karácsonykor megajándékozni a gyerekek: december elején az egyik osztályfőnöki órán egy kalapba beleteszik a 31 nevet, és sorban mindenki kihúzza annak a nevét, akinek ajándékot készít.
a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a húzást meg kell ismételni,mert valaki a saját nevét húzta? **b)** Mekkora ennek a valószínűsége n gyerek esetén ?

(E11) A szabályos ("Platóni") testekkel (tetraéder, kocka, okta-, dodeka- és ikozaéder) csak ötféle egyenletes eloszlást ($1/n$) tudunk kísérletileg előállítani (n=4,6,8,12,21). Adjunk meg minden $n>1$ -re egy olyan térbeli testet, amellyel az $1/n$ egyenletes eloszlás előállítható.

(E12) Egy szórólapterjesztő véletlenszerűen tesz szórólapot néhány postaládába egy lépcsőházban. Jelölje A és B azokat az eseményeket, hogy Aladár illetve Béla postaládájába tett lapot.
o) Hétköznapi szavakkal ismertesse az alábbi adatokat: P(A)=0,9 , P(B)=0,6 , P(AB)=0,55. Fejezze ki A és B -vel az alábbi eseményeket és számítsa ki valószínűségüket: "A terjesztő Aladár és Béla postaládái közül ...
a) valamelyik postaládába tesz szórólapot, **b)** valamelyik postaládába nem tesz szórólapot,
c) egyik postaládába sem tesz szórólapot, **d)** egyikbe tesz, másikba nem tesz szórólapot.

(E13) Kétfajta sorsjátékon játszom. Legyen A az az esemény, hogy az első sorsjátékon nyerek, B az az esemény, hogy a második sorsjátékon nyerek. Tegyük fel, hogy P(A)=0,01, P(B)=0,03, valamint A és B függetlenek. Fejezzük ki A-val és B-vel az alábbi eseményeket és adjuk meg valószínűségüket:
a) egyiken sem nyerek, **b)** legalább az egyiken nem nyerek,
c) legalább az egyiken nyerek, **d)** egyiken nyerek, másikon nem.

(E14) A Mackó kereszteződésben a jobboldali sávban az autók jobbra kanyarodhatnak vagy egyenesen haladhatnak tovább. A zöld időtartama alatt legfeljebb 4 autó tud átjutni a kereszteződésen. Ha egy autó jobbra kíván kikanyarodni, akkor a mögötte levő autó egyenesen tovább tud menni, de jobbra kanyarodni már nem tud. Minden autó a többitől függetlenül 0,6 valószínűséggel akar egyenesen tovább haladni és 0,4 valószínűséggel jobbra kanyarodni. Mennyi a valószínűsége, hogy a zöld időtartama alatt mind a négy várakozó autó átjut a kereszteződésen?

(E15*)** Tapasztalat: annak ellenére, hogy egyre több ember van a Földön / Magyarországon, egyes családnevek véglegesen kihalnak. Mi lehet ennek az oka?
Jelölje p_0, p_1, p_2, ... , p_k, ... annak valószínűségét, hogy egy felnőtt férfinak 0,1,2, ... , k , ... fiúgyermeke születik. Ekkor az átlagos fiúgyermekszám $m = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k$. Adjuk meg a családnév kihalásának valószínűségét!

(E16) Egy idomár bedugja a fejét az oroszlán szájába, a mutatvány 93% valószínűséggel sikerül. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a 100. adást is megéri az idomár?
(Lásd még az (F5) feladatot is.)

(E17) Mi a valószínűsége a következő állításoknak: " *Az én szülinapom ma van, egypetéjű ikertestvérem szülinapja pedig ...*
a) holnap lesz, **b)** holnapután lesz, **c)** két nap múlva lesz, **d)** három nap múlva lesz." ?
(Lásd még az (E9) feladatot is.)

(E18) A közismert "kő-papír-olló" játékban mekkora valószínűséggel lesz
a) döntetlen két játékos esetén, **b)** hárman "körbeverik" egymást ?
(Lásd még a következő feladatot is.)

(E19) Számozzunk meg három kockát a következő módon:
A-ra írjuk a 18, 10, 9, 8, 7, 5 számokat, **B**-re a 17, 16, 15, 4, 3, 2,
C -re pedig a 14, 13, 12, 11, 6, 1 számokat.
a) Számítsuk ki a következő valószínűségeket: P(A>B), P(B>C), P(C>A). **b)** Mi a tanulság? **c)** Készíthetők -e ilyen kockák 1 és 6 közötti számokkal ?

(E20) a) Két kockával dobunk. Ha a dobott számok összege páros, akkor A nyer, ha a dobott számok összege páratlan, akkor B. Ki nyer nagyobb valószínűséggel ?
b*)** Adjuk meg két/három/... kockadobás összegének eloszlását.
(Lásd még az (E4) feladatot is.)

(E21*) Mekkora valószínűséggel dobunk négy kockával 20 -at ?

(E22)** Hogyan lehetséges, hogy péntek 13-a nagyobb valószínűséggel fordul elő, mint más dátum-nap egybeesés?

(E23) Az alábbi három táblázat alapján állapítsuk meg, hogy a gyógyszer segíti-e a gyógyulást a férfiak, nők, illetve az összes beteg esetében ?

	férfiak		*nők*		*összesen*	
	kezelt	nem kezelt	kezelt	nem kezelt	kezelt	nem kezelt
gyógyult	700	80	150	400	850	480
nem gyógyult	800	130	70	280	870	410

Geometriai valószínűség

(G1) Mari és Józsi a könyvtárban beszél meg randevút. Elfoglalt emberek lévén csak annyiban tudnak megállapodni: délután 3 és 4 között mindenképpen beugranak, de nem lehet tudni, mikor, valamint legfeljebb csak 10 percig tudnak várni a másikra. Mennyi $P(\heartsuit) = ?$ (Lásd még a (G5) és (G6) feladatokat is.)

(G2) Egy 1m -es léc véletlenül két helyen eltört. Mekkora valószínűséggel
a) lesz mindegyik darab legalább 2dm hoszú,
b*) lehet az így keletkezett három szakaszból háromszöget szerkeszteni ?

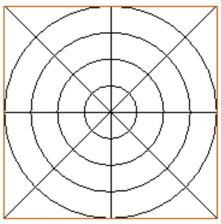
(G3) Mekkora valószínűséggel találjuk el a 30 cm sugarú céltábla 5 cm sugarú középső körét?

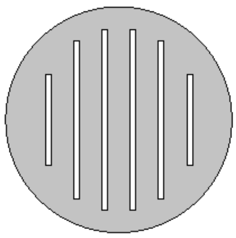
(G4) Mekkora valószínűséggel találja el a labda a 70x80cm -es és 50x50 cm -es ablakok valamelyikét a 3x5m -es tűzfalon?

(G5) A *nüon* és *püon* (nem létező) elemi részecskék élettartama $3 \cdot 10^{-3}$s illetve $2 \cdot 10^{-2}$s. Mekkora valószínűséggel láthatjuk mindkettőt egyszerre a ködkamrában, ha feltételezzük, hogy az 1s megfigyelési idő alatt mindkettő (pontosan) egyszer (valamikor) létrejön?

(G6*) Xénia, Yvett és Zita a könyvtárban beszél meg randevút. Elfoglalt emberek lévén csak annyiban tudnak megállapodni, hogy délután **12** és **8** között mindenképpen beugranak, de nem lehet tudni, mikor, valamint *pontosan* **1** óráig maradnak. Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárman összefutnak ?

(G7) Egy pók a baloldali ábrán látható módon szőtte be a 40cm × 40cm-es pinceablakot. Mekkora valószínűséggel várja a pók az áldozatát a háló valamelyik egyenes szakaszán?





(G8) Mennyi a valószínűsége annak, hogy Peches Panka fülbevalójából a piciny drágakő éppen beleessen a fürdőszoba lefolyóba, ha a tragikus esemény, azaz a kő kipottyanása pontosan a lefolyó fölött következett be. A lefolyó egy 10cm sugarú kör, melyen a nyílások 0,5cm szélesek és 8, 14, illetve 16cm hosszúak.

Bayes tétele

(B1) **Piroska** sétái során 10%, 25% és 65% gyakorisággal választ azt erdei ösvény, földút és autóbuszjárat között, ahol rendre 80%, 60% és 5% valószínűséggel találkozik a **Farkassal** (aki azonnal be is kapja).
a) P(Hamm) = ?
b) Megérkezve Nagymamához Piroska csak annyit rebeg mosolyogva, hogy *"a földúton jöttem"* . Milyen eséllyel hihet neki a Nagyi ?

(B2) A fiókok méretei alapján reggelente (álmosan) 50%, 32% és 18% eséllyel húzok ki zoknit a saját, feleségem ill. fiam fiókjából, melyekben átlagosan 90%, 73% ill. 14% a rám méretes pár.
a) Mekkora valószínűséggel nem késem el munkahelyemről ?
b) Ha nem jön fel, akkor mekkora eséllyel húztam a fiam fiókjából ?

(B3) Az áruház liftjei 0,13, 0,21 ill. 0,09 valószínűséggel *romlanak el*, és az utasok rendre 60%, 16% és 24% esetben választják őket.
a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy vásárló *akadálytalanul* feljut az emeletre ?
b) Ha *segítségkérést* hallunk, akkor az mekkora valószínűséggel jön a második liftből?
c) Az *emeleten tartózkodó* vásárló mekkora valószínűséggel használta az első liftet?

(B4) Egy patkány négy labirintus bármelyikébe egyenlő eséllyel fut be. Annak a valószínűsége, hogy 3 perc alatt kijut belőlük, rendre 0,6; 0,3; 0,2 és 0,1 .
a) Mekkora valószínűséggel bukkan ki 3 perc múlva ?
b) Ha még nem bújt ki, mi a valószínűsége annak, hogy a negyedikben rekedt?

(B5) Négy termelőtől szállítják az alma/tej/stb. 1/10, 1/4, 2/5 illetve 5/20 részét, melyeknek rendre 40%; 50%; 20%; illetve 90% -a hibátlan.
a) Mekkora valószínűséggel kapok jó almát?
b) Ha ütődöttet kapok, mekkora valószínűséggel származik az első termelőtől?

(B6) Egy városban a lakosság fele férfi fele nő. Járvány esetén a nők 30% míg a férfiak 20% valószínűséggel betegszenek meg. A kórházban levő betegek hány % -a férfi ?

(B7) Tegyük fel, hogy a fiúk és lányok születési valószínűsége 50%-50% , és többgyermekes családokban az egyes gyermekek nemei egymástól függetlenek.
a) A kétgyermekes családban tudjuk, hogy a nagyobbik fiú. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkettő fiú?
b) *Ha* egy *kétgyermekes* családról annyit már tudunk, hogy van legalább egy **fiú**, *akkor* mekkora valószínűséggel mondhatjuk, hogy mindkettő **fiú**?
c) Mi a helyzet a **lányokkal** ?
d) *Ha* egy *háromgyermekes* családról annyit már tudunk, hogy van legalább egy **fiú**, *akkor* mekkora valószínűséggel várhatjuk, hogy **lány** is van a családban?

(B8) Egy drogteszt *érzékenysége* 90% (a drogot fogyasztók 90% -át helyesen ismeri fel), valamint *specifikussága* 80% (a nem fogyasztók 80% -át ismeri fel helyesen). Ha feltételezzük, hogy a drogfogyasztás <u>*prevalenciája*</u> 5% (vagyis az emberek 5% -a használ drogot), akkor mekkora valószínűséggel valóban drogfogyasztó egy pozitív teszttel rendelkező, véletlenül kiválasztott személy ?

(B9) Egy játékban három ajtó valamelyike mögött nagy nyeremény van elrejtve, a másik két ajtó mögött nincs semmi. Ha a játékos azt ajtót nyittatja ki, amely mögött a nyeremény található, megnyeri azt, egyébként üres kézzel térhet haza.
A játékos rámutat az egyik ajtóra, de a játékvezető, hogy tovább fokozza az izgalmat, kinyittat egy másik ajtót, amely mögött nincs semmi, és felajánlja a játékosnak, hogy újra választhat a még kettő zárt ajtó közül.
Mikor nagyobb a játékos nyerésének valószínűsége: ha marad az eredeti tippjénél, vagy ha új tippet mond ? (A játékvezető tudja, hol a nyeremény, biztosan olyan ajtót nyittat ki, ami mögött nincs nyeremény, és ha lehet választani, akkor ezek közül véletlenszerűen választ.)

(B10) Egy zálogosdi játékban a "bűnös" a következő "büntetést" kapta. Eléje tettek 20 egyforma poharat, melyek közül 10-ben édes szörp, a másik 10-ben pedig keserű lötty van, az elítélt látja, hogy melyik pohárban mi van. A poharakat két asztalra tetszése szerint teheti, de

egyik asztal sem maradhat üres. Ezután a "zálogház" egyik alkalmazottja bekötött szemmel bejön, valamelyik asztalról felveszi valamelyik poharat, és a elítéltnek azt kell kiinnia.
a) Elérheti -e a bűnös, hogy legalább 75% -ban édes szörpöt kelljen felhajtania?
b) Oldjuk meg a feladatot 20 helyett általában $2 \cdot n$ pohárral!

(B11) Philip Josephiné házmester megfigyelései szerint a meggyilkolt Eustace Leonides otthonában a látogatások 24% -ban Aristide Leonides, 22% -ban Brenda Leonides, 26% -ban Clemency Leonides és 28% -ban Daudit Leonides volt jelen. Mr. Herculet Poirot számításai szerint a felsoroltak rendre 75%, 80%, 78% és 72% valószínűséggel pályáztak az elhunyt vagyonára. Kit gyanúsítson meg a legnagyobb valószínűséggel?

(B12) Faipari termék előállításakor, ha kiválasztok 1 hibátlant, akkor mekkora valószínűséggel készült ez a kiválasztott termék égerfából? A készlet és zárójelben a selejtarányok: bükk 13t (2%), fenyő 7t (5%), éger 0,1t (0.5%), tölgy 2t (0,7%) .

Függetlenség

(F1) Független-e a következő két esemény: egy lapot húzok, A=piros, B=ász ?

(F2) Független-e a következő két esemény: A = van 6-os, B = van 1-es, ha
a) kétszer gurítok kockát, **b)** ötször gurítok kockát.

(F3) Két kockával dobva legyen: A = van hatos, B = összeg legalább 9. Melyik esemény erősíti/gyengíti a másikat ?

(F4*) Mutassuk meg, hogy *tetszőleges* A, B eseményekre $| P(AB) - P(A)\cdot P(B) | \leq 1/4$.
(Tudjuk, hogy az A és B események pontosan akkor függetlenek, ha $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.)

(F5) a) Ha egymástól független események az év *bármely* napján 99%-os valószínűséggel következnek be, akkor mekkora valószínűséggel következnek be az év *mindegyik* napján?
b) Mi a helyzet 99.9% illetve 99.99% valószínűségek esetén?
(Lásd még az (E16) feladatot is.)

(F6*) Dobjunk föl két szabályos pénzérmét, és legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás fej, C pedig jelentse azt, hogy a két dobás közül valamelyik (de csak az egyik) fej.
Mutassuk meg, hogy ekkor az A, B és C események közül bármelyik kettő független egymástól, ugyanakkor bármelyik kettő meg is határozza a harmadikat.

(F7*) Legyen egy bizottságnak öt tagja: A, B, C, D és E, akik többségi szavazással döntenek, A és B 5%, C és D 10%, E pedig 20% valószínűséggel téved (a tévedések egymástól függetlenek).
a) Mekkora a tévedés valószínűsége?
b) Mi történik, ha a legtöbbet tévedő tag (E) mindig úgy dönt, ahogyan a legkevesebbet tévedő (A) ?

Szemléltetések:

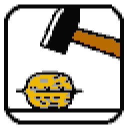
Diszkrét valószínűségi változó: **Kukori** tojáshozama,
Folytonos: **Riska** tejhozama.
Várható érték: Két statisztikus az erdőben lő: egyikük jobbra téveszti el a célt 1*m* -rel, másikuk balra. *"Hurrá!* (átlagban) *Eltaláltuk!"*

Diszkrét eloszlások

(D1) Esténként hazatérve **Arisztid** 0,35 valószínűséggel tudja a kulcsot a zárba illeszteni, egymás utáni próbálkozásai egymástól függetlenek. Mi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb 9 próbálko-zás után bejut a lakásba?

(D2) A vizsga átlagosan a hallgatók 15% -ának nem sikerül. Mekkora valószínűséggel lesz elég hét vizsgalehetőség ?

(D3) A *"Ki nevet a végén"* ("Man ich ärgere dich nicht") társasjátékot az kezdi, aki két kockával dobva legalább az egyik hatos. Mekkora valószínűséggel lesz elegendő ehhez legfeljebb 4 dobás? Adja meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását!



D4) Egy kalapácsütés 75%-ban repeszti meg a diót. Hány kalapácsütés hatásos 99% valószínűséggel ?

(D5) a) Ketten felváltva dobnak egy pénzérmét. Az nyer, aki először fejet dob. Mekkora valószínűséggel nyer a kezdő illetve a második játékos?
b) Ketten felváltva lőnek egymásra, a találat valószínűsége p_E (első) és p_M (második). Mekkora valószínűséggel nyer az első illetve a második párbajozó?

(D6) Adjuk meg a pénztárnál alkalmazott (azaz a végösszeg utolsó jegyét 0 vagy 5 Ft-ra) kerekítés eloszlását a vásárló szemszögéből, és számoljuk ki a várható értéket, szórást.

(D7) a) Egy ütésre a forró vas hőmérséklete 10% -kal csökken. Hány ütés után csökken a hőmérséklete 50% illetve 10% alá?
b) Egy ütésre a forró vas hőmérséklete 15% valószínűséggel csökken a megengedett alá. Mekkora valószínűséggel üthetünk rá ötöt úgy, hogy még mindig ne csökkenjen le a hőmérséklete a megengedett alá ?
c) A korsó minden, a kútra történő sétája alkalmával 1,9% valószínűséggel törik össze. Mekkora valószínűséggel használhatjuk a korsót 100 vízhordásig?

(D8) Szindbád előtt elvonul a hárem összes hölgye, akik között szépség tekintetében egyértelmű sorrend áll fenn. Szindbád célja, hogy kiválassza a legszebbet. Minden elvonulónál Szindbád nyilatkozhat, hogy az aktuális hölgyet választja-e vagy nem, de később már nem választhatja a korábban elvonultakat. Szindbád "***k* stratégiája**" a következő: elenged k számú hölgyet, és az ezt követők közül azt választja, aki a korábban elvonultak mindegyikénél szebb, ha ilyen nincs, akkor az utolsót. Mennyi a valószínűsége, hogy sikerül a legszebb hölgyet kiválasztania? (A hölgyek számát jelölje N és $k<N$.)

(D9) A raktáron levő 120 konzerv 5% -a lejárt. Mekkora valószínűséggel lesz 10 kiválasztott dobozból **a)** éppen 2 lejárt, **b)** legfeljebb 3 lejárt ?

(D10) A Biblia ismert története "Jákobnak csudálatos szerződése Lábánnal", amely szerint Jákob a szolgálat fejében minden évben megkapta Lábán (elenyészően kevés) tarka és fekete bárányait, amelyek részaránya sokkal kisebb volt, mint a Lábánnál maradó részarány, azonban idővel mégis Jákob lett a gazdagabb.

Tételezzük fel, hogy minden juhnak minden évben átlagosan u darab utóda lesz (nincs elhullás), melyek átlagosan p -ed része *nem* tarka vagy fekete. Jelölje J_n Jákob, L_n pedig Lábán juhainak számát az n-edik évben, kezdetben $J_0 = 0$ és $L_0 > 0$ valamilyen pozitív szám.

a) Írjunk fel (szimultán) rekurzív összefüggést L_n és J_n -re, és oldjuk meg.

b) $p = 90\%$ és $u = 2$ esetén a kétszer hét év szolgálat után hányszor több juha lesz Jákobnak mint Lábánnak ?

(D11*) Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel, amíg **a)** két fej (**FF**), **b)** egy fej és egy írás (**FI**) nem jön ki közvetlenül egymás után (ebben a sorrendben). Határozzuk meg a szükséges dobások számának várható értékét az a) és b) esetekben.

Poisson eloszlás

(P1) Egy 1 kg-os húsvéti kalácsba 50 szem mazsolát tettünk, majd 10 dkg-os szeletekre vágtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott szeletben 7 szem mazsola van ?

(P2) Augusztusban az egy óra alatt megfigyelt hullócsillagok száma átlagosan 11, Poisson eloszlást követ. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 15 perc alatt legfeljebb 2 hullócsillagot látunk ?

(P3) Egy szövetanyagon 10 méterenként átlagosan 6 hiba van, a hibák száma Poisson eloszlást követ. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy 4m szakaszon 3-nál kevesebb hiba van?

(P4) Egy 1000 palack készítésére elegendő üvegmasszában 300 kavics volt. Mi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott üvegben legalább 2 kavics van?

(P5) Évente átlagosan 3 féltégla esik fejemre. Mekkora valószínűséggel úszom meg a mai napot?

Folytonos eloszlások

(f1) Adjuk meg egy R sugarú céltáblára lövés középponttól való *távolságának* eloszlását (kumulatív eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét), várható értékét és szórását !

(f2) Gyermekünk véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) tartja a *vízibombát* a csap alá legfeljebb 10 másodpercig. Határozzuk meg a lufi *átmérőjének* eloszlását.

Exponenciális eloszlás

(e1) Ha az izzók átlagos élettartamát 100 órának és élettartamuk eloszlását exponenciálisnak tételezzük fel, akkor mekkora valószínűséggel használhatjuk a frissen vásárolt égőt legalább **a)** 70 óráig, **b)** 100 óráig ("átlag") ?

(e2) Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 6 percnél többet kell várni 0,3. Adjuk meg azt az időt, amin belül 0,9 valószínűséggel sorra kerülünk, ha a várakozási időt *exponenciális* eloszlású!

(e3) Az **A** telefontársaság folytonos alapon számláz, 20 Ft/perc díjjal, a **B** társaság perc alapon számláz 15 Ft/perc díjjal (minden megkezdett perc után fizetni kell). Melyik számlázási módot érdemes választani, ha hívásunk hossza átlagosan 2 perc (és exponenciális eloszlású) ?

(e4) Szaharai utazás alatt 4 gumival 6342 km-t utazunk, induláskor mind jó. A gumi élettartalma a gyártó szerint 30.000 km.
a) Az utat egy-egy gumi mekkora valószínűséggel éli túl?
b) Mekkora valószínűséggel nem kell gumit cserélnünk az egész út során ?

Normális eloszlás

(N1) A Balaton szeletek névleges töltési tömege 31 ± 6 gr. Mekkora valószínűséggel lesz egy szelet tömege legalább 29 gr ? (Ugyanez kristálycukorral, stb.)

(N2) A valódi és a megjósolt hőmérséklet *eltérése* normális eloszlást követ (-2,4) paraméterekkel. Ha a meteorológus " 22C " -t jósol, akkor mekkora valószínűséggel lesz a holnapi hőmérséklet 20 és 24 C között ?

(N3) A tapasztalat szerint a kenyérgyárban gyártott 1 kg-os kenyér tömege normális eloszlású, 100 dkg várható értékkel. Mekkora a szórás, ha a kenyerek 99% -a 102 dkg -nál könnyebb?

(N4) A húszéves férfiak magassága N(190,11cm) normális eloszlású. Mekkora valószínűséggel találunk közöttük 180 cm -nél magasabb férfiakat ?

(N5) Egy liftet 8 felnőtt személyre méreteznek. A beszállók tömege átlagosan 75 kg, 15 kg szórással. Mennyi legyen a lift teherbíró képessége, ha azt szeretnénk, hogy 4 személy beszállása esetén 0.99 valószínűséggel ne gyulladjon ki a túlterheltséget jelző lámpa?

(N6) Egy vállalat napi cement felhasználása 4q ± 0,7q. Peti raktáros egy (ötnapos) hétre 19q -t vett. Mekkora a valószínűsége, hogy Petit nem rúgják ki (elég lesz a cement)?

(N7) A férfiak magassága N(190,11cm), a nők magassága N(180,10cm). Véletlenszerűen kiválasztva egy férfit és egy nőt, mekkora valószínűséggel lesz a férfi magasabb a nőnél?

Centrális határeloszlás tétel

(C1) Egy előadásra 300 ember jelentkezett be. Minden jelentkező 0.9 valószínűséggel jelenik meg az előadáson.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy a megjelenők száma legalább 160 de legfeljebb 280 ?
b) Legfeljebb hány ember jelenik meg 0.9 valószínűséggel?
c) Hány ember jelentkezhet be, ha azt szeretnénk, hogy 0.99 valószínűséggel legfeljebb 300 jelenjen meg 0.99 valószínűséggel?

(C2) Egy izzó élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó 2000 óra várható értékkel.
a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy izzó élettartama 1500 és 3000 óra közé esik?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy 100 izzó élettartamának átlaga 1500 és 3000 óra közé esik?
c) Legalább mennyi egy izzó élettartama 0.98 valószínűséggel?
d) Legalább mennyi 100 izzó élettartamának átlaga 0.98 valószínűséggel?
e) Adjunk olyan 2000 órára szimmetrikus intervallumot, amibe egy izzó élettartama 0.8 valószínűséggel beleesik!
f) Adjunk olyan 2000 órára szimmetrikus intervallumot, amibe 100 izzó élettartamának átlaga 0.8 valószínűséggel belesik!

(C3) Feladat: 1000-szer elgurítunk egy kockát. Legyen ξ a dobott hatosok száma.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott hatosok relatív gyakorisága 0.16 és 0.17 közé esik?
b) Adjunk olyan 1/6 -ra szimmetrikus intervallumot, amibe a relatív gyakoriság 0.9 valószínűséggel beleesik!
c) Hányszor gurítsuk el a kockát, ha azt szeretnénk, hogy a hatosok számának relatív gyakorisága a hatos dobás valószínűségét 0.01-nél kisebb hibával közelítse 0.9 valószínűséggel?

(C4) Szabályos érmével fej vagy írás játékot játszunk, az érmét 100 -szor dobjuk fel. Mi a valószínűsége a következő eseményeknek:
a) pontosan 50 fejet dobunk,
b) legalább 60 fejet dobunk?
c) legalább 55 fejet dobunk?

$\Phi(x)$ kiszámítása számológéppel

$\Phi(x)$ azért van táblázatban, mert Liouville tétele szerint (lásd [SzI 2012b]) *pontos* képlettel nem adható meg. Az alábbiakban pár *közelítő* formulát ismertetünk [wiki-Norm] és [RA] alapján.

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots \right)$$

vagy

$$\Phi(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - e^{-2x^2/\pi}}\right) & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - e^{-2x^2/\pi}}\right) & \text{ha } 0 \leq x \end{cases}$$

vagy

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{\tanh(0.8 \cdot x)}{2} \approx 0.5 + 0.4x - 0.085333x^3 + 0.021845x^5 - 0.005659x^7 + 0.0014676x^9$$

ahol $\tanh(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ a *tangens-hiberbolikusz* függvény $(z \in \mathbb{R})$

$$\Phi^{-1}(y) \approx \begin{cases} \sqrt{-1.570796 \cdot \ln\left(1 - (2y)^2\right)} & \text{ha } 0 \leq y \leq 0.5 \\ 1 - \sqrt{-1.570796 \cdot \ln\left(1 - (2y-1)^2\right)} & \text{ha } 0.5 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

vagy

$$\Phi^{-1}(y) = \frac{5}{8} \cdot \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

Felhasznált és ajánlott irodalom

[KoMaL] Csatár Katalin, Harró Ágota, Hegyi Györgyné, Lövey Éva, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Ratkó Éva: *Valószínűségszámítási feladatok* https://www.komal.hu/cikkek/valszam/valszam.h.shtml

[MGy] Miholcsa Gyula: *Labirintus - logikai és egyéb fejtörők*, Appendix könyvkiadó 2001, Marosvásárhely.

[MOE] Mihálykóné Orbán Éva: *Valószínűségszámítási példatár informatikusoknak*, Typotex, 2011, https://dtk.tankonyvtar.hu/handle/123456789/7496

[RA] Robin,A.C.: *A quick approximation to the normal integral*, The Math. Gazette vol 81, (1997) March, pp. 95-96.

[SzG] Székely J. Gábor: *Paradoxonok a véletlen matematikájában*, Műszaki Kiadó, Budapest 1982, Typotex Kiadó, Budapest, 2004.

[SzI 1993] Szalkai István, Velleman,D.J.: *Versatile Coins* , Amer.Math.Monthly 100 (1993) pp. 26-33.

[SzI 1995b] Szalkai István, Velleman,D.J.: *Rugalmas pénzérmék*, Matematikai Lapok, 1992/3-4, (1995), 23-38. old.

[SzI 1999c] Szalkai István: *Egymásba ágyazott FOR-ciklusok alkalmazása*, Polygon, IX (1999) 55-58. old.

[SzI 2006] Szalkai István: *Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai*, Veszprémi Egyetemi Kiadó, 2006.

[SzI 2012a] Szalkai István: *Mindennapi matematika*, BJMT 2012, https://www.bolyai.hu/files/Veszpr_2020_Mindennapi_mat-201015.pdf

[SzI 2012b] Szalkai István: *Szemléletes analízis* I., Tankönyvtár, 2012. https://dtk.tankonyvtar.hu/handle/123456789/3129

[TR] Tokić Rudolf: *Valószínűségszámítási paradoxonok*, érettségi dolgozat, Zenta, 2014. http://members.tippnet.rs/beres/01_diakjaim_altal/Tokic_Rudolf.pdf

[wiki-MH] Wikipédia: *Monty_Hall-paradoxon*
https://**hu**.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall-paradoxon
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem

[wiki-Norm] Wikipedia: *Normal_distribution* ,
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution
https://**fr**.wikipedia.org/wiki/Loi_normale

[wiki-Odds] Wikipedia: *Odds*,
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Odds
https://**de**.wikipedia.org/wiki/Chance_(Stochastik)
https://**fr**.wikipedia.org/wiki/Cote_(probabilités)

[wiki-Szub] Wikipédia: *Szubfaktoriális*,
https://**hu**.wikipedia.org/wiki/Faktoriális => Szubfaktoriális
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Derangement
https://**fr**.wikipedia.org/wiki/Probléme_des_rencontres

[wiki-Szul] Wikipédia: *Születésnap paradoxon*,
https://**hu**.wikipedia.org/wiki/Születésnap-paradoxon
https://**en**.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem