

# KöMaL

1976  
5. SZÁM

## KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI LAPOK

FIZIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

52. KÖTET

5.

SZÁM

OKTATÁSI MINISZTERIUM

\*  
BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT

\*  
EÖTVÖS LORÁND FIZIKAI TÁRSULAT

BUDAPEST, 1976. MÁJUS

### KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI LAPOK FIZIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

Megjelenik évente 10 számban, a január–május, valamint szeptember–december hónapokban havonta. Novemberben kettős szám jelenik meg. A tavaszi és őszi 5–5 szám 1–1 kötetet alkot.

A matematika szerkesztő bizottság vezetője: TUSNÁDY GÁBOR  
Tagjai: ÁCS PÁL, BAKOS TIBOR, CSIGMAZ LÁSZLÓ, GÁLFI LÁSZLÓ,  
LUKÁCS OTTÓ, LIPPNER GYÖRGY, RATKÓ ISTVÁN, TOLNAI JENŐ

A fizika rovatot szerkeszti: SZŐKEFALVI-NAGY ÁGNES

A fizika szerkesztő bizottság vezetője: BODÓ ZALÁN  
Tagjai: HOLICS LÁSZLÓ, KUNFALVI BEZSÓ, MAJOR JÁNOS,  
SIMON LÁSZLÓ, SZÉKELY GYÖRGY, VERMES MIKLÓS

#### TARTALOMJEGYZÉK

Az Ifjúsági Lapkiadó Vállalat megalakulásának 25. évfordulójára .....	193
Úry László: Ellentmondások a matematikában .....	194
Oktató .....	206
Tusnádgy Gábor: Megjegyzések az oktatóhoz .....	209
Feladatmegoldások (2016., 2019.) .....	210
Gyakorlatmegoldások (1660., 1612., 1615.) .....	213
Számítástechnikai Rovat .....	216
A Fejér megyei középiskolások 1976. évi matematikai versenye .....	217
Emléküket őrizzük .....	219
A 26. pontverseny állása az 1975. évi 10. szám megoldásai után (Folytatás a borító 3. oldalán) .....	219
A pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1637–1642.) és feladatok (2043–2048.) ..	221
Pontversenyen kívüli problémák (269–270.) .....	223
Новые упражнения, задачи и проблемы .....	223
New exercises and problems .....	224
<i>Fizika Rovat</i>	
A fizika gyakorlatok megoldása (374–376.) .....	225
A fizika feladatok megoldása (1323–1325., 1327., 1329–1335.) .....	226
Megjegyzés az 1976/77. évi kísérleti pályázathoz .....	238
Kitűzött gyakorlatok (386–388.) és feladatok (1335–1371.) .....	239
Physics .....	240

52. kötet, 5. szám

Budapest, 1976. május

Felölés szerkesztő: Fried Ervinné

Kiadja az Ifjúsági Lapkiadó Vállalat. Felölés kiadó: Dr. Petrus György igazgató

Terjeszti a Magyar Posta

INDEX 25 450

## Ellentmondásos-e a matematika?

Ezt a cikket azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik nem sajnálják a fáradságot, hogy a matematika egy igen fontos, de fiatal ágával megismerkedjenek. Témája nem kapcsolódik szorosan a középiskolai tananyaghoz, de a benne szereplő tételek ismerete az egész matematika épületébe ad betekintést. A cikk nem könnyű olvasmány, nagy figyelmet igényel, a dolog természeténél fogva a benne szereplő fogalmak igen absztrakta. A hosszú nyári szünet alatt biztosan sok olvasónk veszi majd a fáradságot, hogy alaposan elmélyedjen a cikkben, megpróbálja a benne szereplő feladatokat megoldani. Akinek kedve van, megoldásait beküldheti a szerkesztőség címére (1443 Budapest, Postafiók 129). Ezeket a megoldásokat a cikk írója értékeli. Ha a téma megnyerte olvasóink tetszését, egy későbbi számunkban folytatjuk.

Várjuk Olvasóink hozzászólásait, megjegyzéseit.

*A szerkesztőség*

### Bevezetés

A matematika történetében akadtak válságos időszakok, melyekben a felmerülő problémák a korabeli matematika alappilléreit érintették, s így összedőléssel fenyegették a matematika egész épületét. Például a görögöket úgy ismerjük, mint a derűs alkotás mestereit. Amikor azonban a pithagoreusok felfedezték a  $\sqrt{2}$  irracionálisát — vagyis azt, hogy a négyzet átlója összemérhetetlen az oldalával —, ezt sokáig titkolták. Ebben a tényben a világ harmóniájának megbomlását látták, és attól féltek, ha nyilvánosságra kerül, az a társadalom harmóniáját is veszélyeztetné.

Legutóbb a századfordulón bukkantak fel a matematikában olyan ellentmondások, melyek nagyon sok, eddig biztosnak és tisztázottnak érzett fogalmat tettek kérdésessé: egyáltalán mit értünk definíción, tételen, állításon? Hogyan láthatjuk be, hogy axiómák nem tartalmaznak ellentmondást? Van-e olyan matematikai állítás, amit nem azért nem tudunk sem bizonyítani, sem cáfolni, mert ügyetlenek vagyunk, hanem mert egyáltalán nem is lehet soha cáfolni, se bizonyítani? Míg az eddigi problémákat jól jellemezheti egy ilyen kérdés: „Mit jelent a  $\sqrt{-1}$ ?”, addig most már az volt a kérdés, mi is a matematika?

A kószból és zűrzavarból a matematika két fiatal ága született: az axiomatikus halmazelmélet és a matematikai logika. Az első megoldási kísérlet *D. Hilbert*-től (1862–1943) és *B. Russell*-től (1872–1970) származik. Nagyon sok kiváló matematikus kapcsolódott be a kutatásokba, hozott létre maradandó eredményeket. Nekünk magyaroknak sincs szűgyellnivalónk, gondoljunk csak Neumann Jánosra, Kőny Gyulára vagy a ma élők közül Péter Rózásra, Kalmár Lászlóra, Hajnal Andrássra.

Hogy jobban tudjunk a témakörben tájékozódni, a felbukkant ellentmondások közül bemutatunk kettőt, elsőnek a Russell-féle antinómiát. Halmazon akkoriban bizonyos tulajdonságú dolgok összességét értették, szerintük halmazt alkotnak a magyar ábécé betűi, a Budapesten tanuló diákok, vagy azok a dolgok, amiket Trudi néniék gépe akkor tüntetett el, amikor Klapanciusz elhamarkodottan a Semmit csináltatta meg vele. Ha az  $X$  halmaznak az  $Y$  dolog eleme, akkor ezt így írjuk:  $Y \in X$ . Jelölje  $H$  az összes halmazok halmazát. Mivel  $H$  halmaz, így  $H \in H$ . Tehát vannak olyan halmazok, amelyek elemként tartalmaznak önmagukat, és persze olyanok is, amelyek nem. Az utóbbiakat *nem tartalmazkodó halmazoknak* hívjuk. Jelölje  $R$  az összes nem tartalmazkodó halmazok halmazát. Vajon  $R$  eleme-e önmagának? Ha igen, akkor  $R$  nem tartalmazkodó, tehát nem eleme önmagának. Így csak az lehet, hogy  $R$  nem tartalmazkodó halmaz, akkor viszont eleme önmagának, hiszen  $R$  az összes nem tartalmazkodó halmazt elemként tartalmazza, s így megint csak ellentmondást kapnánk. Így arra a képtelenségre jutottunk, hogy nem tudjuk megmondani pontosan, milyen elemekből áll az  $R$  halmaz.

Példánk jól mutatja, hogy precízebben meg kellene mondanunk, milyen tulajdonság alapján sorolhatunk különböző dolgokat egyetlen halmazba. Egyáltalán, pontosabban meg kellene mondanunk, mit értünk azon a szón: „tulajdonság”, és mit azon, hogy „dolog”.

Második példánk még egyszerűbb. Vajon igaz-e vagy sem a következő állítás: „hazudok”? Ha igaz, akkor hazudok, tehát nem mondtam igazat. Így annak, amit mondtam, épp az ellenkezője igaz, azaz nem hazudok, hanem igazat mondtam. A kör ezzel bezárult,

erről a nagyon egyszerű állításról képtelenek vagyunk eldönteni, igaz-e vagy hamis. Ebből mindenesetre arra következtethetünk, hogy alaposabban meg kellene vizsgálnunk, mit is értünk azon, hogy egy állítás igaz vagy hamis, és azt is, mit tekinthetünk állításnak.

Ennek a cikknek az a célja, hogy képet adjon a felvetett kérdések, ellentmondások megoldásának matematikai útjáról. Bemutassa, hogy milyen módszerekkel és fogalmakkal dolgozik a matematikai logika, a matematika önismereti tudománya.

Nagyon kevés dolgot bizonyítunk, épp csak a legkönnyebbeket. Ezzel szemben nagyon sok új fogalommal ismerkedünk meg, amiket az áttekinthetőség kedvéért a cikk végén felsorolunk.

### Matematikai struktúrák

A matematikusok nagyon forcsa szemüvegen át nézik a világot. Vizsgáljunk például egy népes családot. Itt a bíró egy esetleges valóperes tárgyalást, az orvos szív- és béműködést, a szociológus jó vagy rossz lakáshelyzetet lát, mindenkit valami más érdekel. Mit láthat és mit vizsgálhat itt a matematikus? Nem sokat, csak annyit lát, hogy valaki valakinek az apja, hogy valaki megint más valakinek a házastársa. Elfelejtkezik arról, hogy a családnya szőke, kék a szeme, itt és itt dolgozik, hogy hány kiló, csupán csak viszonyokat, relációkat vizsgál: két ember egy bizonyos viszonyban áll egymással, nevezetesen férj és feleség. Ellenvetésként bárki mondhatja, hogy a matematika számokkal foglalkozik leginkább, s így a család életkorának változását épp úgy látja, mint a szociológus. Ez igaz, de később látni fogjuk, hogy a számok relációk segítségével kifejezhetők. Egy egyszerű példával megvilágítjuk, hogy ez nem is olyan távoli szemléletünkől. A labdarúgóedény végével az újságok megírják, ki lett az első, a második, a tizedik. Ehelyett azonban teljesen elegendő lenne azt a relációt megadni, amelyik megmutatja, melyik csapat kit előzött meg.

### Definíció:

*Individuumtartományon* elemek, dolgok bizonyos összességét értjük.

A matematikusok vizsgálódási körébe különböző individuumtartományok tartoznak. A geometriában például ez a sík pontjainak és egyenesének összessége, az algebraiban például a valós számok.

Legyen  $A$  egy individuumtartomány.  $A$ -beli rendezett  $n$ -esen az  $A$ -nak  $n$  darab elemét értjük meghatározott sorrendben. A rendezett 2-est másképpen *rendezett párnak* hívjuk. Ez a fogalom már ismert a koordinátageometriából, ahol a sík és a tér pontjait valós számokból álló rendezett párokkal, illetve hármasokkal írjuk le. A sík egy pontja például  $(14, -5)$ , a téré pedig  $(1, -3, 0)$ . Az elemek sorrendje *lényeges*, a  $(14, -5)$  és a  $(-5, 14)$  pontok nem azonosak.

Az  $A$ -beli rendezett  $n$ -esek halmazát  $\mathcal{A}$ -val jelöljük.

### Definíció:

Egy  $A$ -n értelmezett  $n$ -változós  $M$  műveleten egy olyan megfeleltetést értünk, amely  $\mathcal{A}$  minden eleméhez hozzárendeli  $A$  egy elemét.

Az  $M$  műveletet  $A$  tetszőlegesen választott  $n$  elemére alkalmazva  $A$  egy újabb elemét kapjuk. Műveletek például az összeadás és a szorzás, ha individuumtartományunk  $R$ -t, a valós számok halmazát választjuk. Nem művelet  $R$ -n az osztás, ugyanis az  $(x, 0)$  párnak nem felel meg semmi. Ezen kétféleképpen is segíthetünk: vagy individuumtartományunk  $R - \{0\}$ -t választjuk (a valós számok halmazából elhagyva az egyetlen  $0$  számot), vagy  $x/0$ -t  $0$ -nak definiáljuk. Az így kapott osztások már műveletek. Négyváltozós művelet  $R$ -n a min  $(x, y, z, w)$ . De művelet az is, ha egy színházban ülő emberek mindegyikéhez hozzárendeljük a hozzá legközelebb ülő, tőle különböző embert. Itt az individuumtartomány a színházban ülő emberek összessége, a szóban forgó művelet egyváltozós.

*1. feladat.* Jelölje  $\mathcal{A}$  a ma élő,  $\mathcal{B}$  pedig a valaha élt emberek összességét.  $\mathcal{A}$  az a hozzárendelés, amelyik mindenkinek megfelelteti az anyját.  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  individuumtartományok melyikén lesz  $\mathcal{A}$  művelet és melyikén nem?

### Definíció:

Egy  $A$ -n értelmezett  $n$ -változós  $P$  reláció  $A$  egy részhalmaza.

Kicsit részletesebben ez azt jelenti, hogy  $A$  minden rendezett  $n$ -eséről el tudom dönteni, hogy az adott sorrendben eleme-e  $P$ -nek vagy sem,  $P$  relációban állnak-e vagy sem. Ismert reláció például  $N$ -n, a természetes számok halmazán a „kisebb” kétváltozós reláció.  $\mathcal{E}$ -n, a ma élő emberek halmazán egy kétváltozós reláció az „idősebb” vagy az a  $\mathcal{R}$  reláció, ami azt jelenti, hogy „házastársak”.

### Definíció:

Egy  $A$ -beli  $C$  konstans  $A$  egy kitüntetett elemét értjük.

A „konstans” szót gyakran a „szám” szinonimájaként használjuk, itt azonban eredeti „állandó” értelmében szerepel. Például  $\mathcal{E}$ -beli konstans „a szerző édesanyja”.

### Definíció:

Egy  $\mathcal{U} = (A; M_1, \dots, M_p; P_1, \dots, P_q; C_1, \dots, C_s)$  struktúra áll

- (i) az  $A$  nem üres individuumbtartományból,
- (ii)  $A$ -n értelmezett véges sok ( $p$  darab)  $M_1, M_2, \dots, M_p$  műveletről,
- (iii)  $A$ -n értelmezett véges sok ( $q$  darab)  $P_1, P_2, \dots, P_q$  relációból és
- (iv)  $A$ -beli véges sok ( $s$  darab)  $C_1, C_2, \dots, C_s$  konstansból.

A matematikus feladata a különböző struktúrák vizsgálata. Számára mindegy, hogy az individuumbtartomány elemei számok, emberek, csavarok, vagy dugóhúzó, érdeklődése a relációk és műveletek felé fordul.

A matematikai struktúra fogalmát a legabsztraktabb, tehát legegyszerűbb formájában fogalmazzuk meg. Célunk ugyanis nem az, hogy egyes matematikai feladatokat oldjunk meg, hanem az összes lehetséges feladatokat szerkezetét tanulmányozzuk. Minél kevesebb eszközt engedünk meg a feladatok megfogalmazására, annál könnyebben tudjuk szerkezetüket leírni.

2. feladat. Legyen  $\mathcal{G}$  a geometria struktúrája,  $\mathcal{W}$  pedig a vektorok struktúrája. Milyen relációkból, műveletekből és konstansokból állnak? Mi az individuumbtartományuk?

3. feladat. Adjunk meg  $\mathcal{E}$ -n minél több műveletet! Törekedjünk arra, hogy ezek ne legyenek légbőlkapottak! Mit mondhatunk arról a hozzárendelésről, ami minden emberhez a nevét rendeli?

### Matematikai nyelvek felépítése

Az előző részben említett műveleteknek, relációknak vannak lényeges, meghatározó jellei. Például az összeadás kommutatív,  $\mathcal{R}$  pedig szimmetrikus. Feladatunk nehézsége éppen abban áll, hogy ezekről a tulajdonságokról beszélni tudjunk, értelmes állításokat mondassunk ki struktúráinkban. Természetesen eddig is beszéltünk róluk, csak hogy a beszélt nyelv túlságosan sok kétértelműséget rejt magában. Első feladatunk így olyan mesterséges nyelv létrehozása, amelyik lehetőség szerint minden kétértelműséget kizár. Erre a célra nem egyetlen nyelvet, hanem nyelvek egész családját konstruáljuk meg, s ezeket matematikai nyelveknek nevezzük. Különböző struktúrabeli állításokat ezeknek a nyelveknek valamelyikén fogjuk felírni.

Először is meg kell adnunk az ilyen nyelvek ábécéjét, s azokat a szabályokat, amelyek segítségével felépíthetjük mesterséges nyelvünk mondatait, melyeket itt *formuláknak* hívunk. Kezdjük hozzá a munkához!

Nézzük például a következő, az  $(N, +, 1)$  struktúráról szóló állítást: „Tetszőleges  $x$  természetes szám nagyobb vagy egyenlő, mint 1.” Az „ $x$ ” jel itt nem egyetlen természetes számot jelent, tetszősünk szerint akármelyik lehet, az összeadást, az egészlet képviseli, mintegy végigfut a természetes számokon. Nyelvünknek szüksége lesz ilyen jelekre.

(A) Nyelvünk tartalmazza az  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  változójeleket.

Végtelen sok változójel van, s hogy meg tudjuk különböztetni őket egymástól, írdeheltük őket. Esetenként más betűket is használhatunk változójeleknak, fontos csak az, hogy tudjuk, ezek változójelek. (Mindig, hogy az „ $a$ ” betűt milyen típusal szedjük ki, könyvecs, hogy felismerjük, ez „ $a$ ” betű.)

Ez azonban még kevés. Struktúráink az individuumbtartományon kívül műveletekből, konstansokból, relációkból állanak. Ezeknek a matematikai objektumoknak a leírására különböző jeleket vezetünk be.

(B) Nyelvünk tartalmazhat véges sok  $f_1, f_2, \dots, f_p$  műveletjelet. Minden műveletjeletről tudnunk kell egyben, hogy hányváltozós műveletet reprezentál. Ha például  $f$  az összeadásnak felel meg, akkor kétváltozós műveletjel. Azokat a jeleket, amelyekre a műveletjel vonatkozik, rendszerint a műveletjel után zárójelbe téve soroljuk fel. Szokás azonban a hagyományos műveletjelek esetén például  $f(x, y)$  helyett  $(x+y)$ -t írni. A műveletjelek szigorúan elkülönülnek egymástól, a  $+$  és a  $\cdot$  nem cserélhető össze. Az érhiltség és rövidség kedvéért az  $f_i$ -k helyett gyakran használunk más jeleket is műveletjeleknak, de mindig tudni fogjuk, ezek itt műveletjelek.

(C) Nyelvünk tartalmazhat véges sok  $k_1, k_2, \dots, k_s$  konstansjelet. A konstansjelek, a műveletjelekhez hasonlóan, nem feltétlenül a nyelv tartozékai. Lehet hogy csak néhány van belőlük, de akár teljesen el is maradhatnak. A konstansjelek írására is használunk néha más jeleket.

(D) Nyelvünk tartalmazhat véges sok  $r_1, r_2, \dots, r_q$  relációjelet. Minden relációjelhez, ugyanúgy mint a műveletjelekhez, hozzárendelünk egy számot, amely megmutatja, hogy hányváltozós relációjelet jelöl van szó. Csakúgy, mint a műveletjeleknél, a relációjel után téve zárójelben soroljuk fel azokat a jeleket amire a relációjel vonatkozik. Például ha  $r_1$  az egyenlőség relációjele, akkor kétváltozós és szokás szerint  $r_1(x, y)$  helyett  $x=y$ -t írunk.

(E) Nyelvünk tartalmazza az  $\wedge$  (= és),  $\vee$  (= vagy),  $\rightarrow$  (= ha...akkor),  $\neg$  (= nem),  $\forall$  (= minden egyes),  $\exists$  (= van olyan) logikai jeleket.

Később ezek segítségével fogjuk felépíteni állításainkat, akkor részletezzük ezek jelentését.

### Definíció:

Egy  $L$  matematikai nyelv az (A)–(E) pontokban felsorolt jelekből és zárójelből áll.

A matematikai nyelvek jelölésére meghonosodott  $L$  betű az angol language = = nyelv szó kezdőbetűjéből származik.

Nyelvünk állandó alkotói a változó- és logikai jelek, illetve a különböző fajta zárójel. Így a nyelv megadásához elegendő művelet-, reláció- és konstansjeleink a felsorolása. Ha például azt mondjuk, hogy a halmazelmélet nyelve mindössze két darab kétváltozós relációjelekből áll (az = és  $\in$  relációjelekből); akkor ezen azt értjük, hogy a nyelv állandó alkotóin kívül mindössze ezt a két jelet tartalmazza. Bonyolultabb a természetes számok nyelve, amely egy darab egyváltozós és két darab kétváltozós műveletjelel (a rákövetkezés – azaz eggyel növelés –, a + és a  $\cdot$  jelek), egy kétváltozós relációjelel (=) és egy konstansjelel (1) áll.

### Definíció:

- (i) Tetszőleges  $x$ , változójel illetve tetszőleges  $k$ , konstansjel kifejezés.
- (ii) Ha  $t_1, t_2, \dots, t_n$  kifejezések és  $f$ ,  $n$ -változós műveletjel, akkor  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  is kifejezés.
- (iii) Csak az (i) és (ii) véges sokszori alkalmazásával kapunk kifejezést.

Legyen például a  $+$  kétváltozós műveletjel. Ekkor  $(x+y)$  és  $((x+y)+z)$  kifejezés, de  $+x$  nem, mert nem kapható meg (i) és (ii) véges sokszori alkalmazásával. Definícióinkban éppen azt fogalmazzuk meg, amit mindenki kifejezésnek tekint, így egy helyesen felírt egyenlet mindkét oldala kifejezés lesz, ha csak a nyelvben szereplő műveletjeleket használunk fel.

Ennyi előkészítés után pontosan definiálhatjuk, mit is értünk formulán.

**Definíció:**

(i) Ha  $t_1, t_2, \dots, t_n$  tetszőleges kifejezések, és  $r_i$  tetszőleges  $n$ -változós relációjel, akkor  $r_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$  formula.

(ii) Ha  $\varphi$  és  $\psi$  formulák, akkor a következők is azok:

- (a)  $(\neg\varphi)$  (b)  $(\varphi \vee \psi)$  (c)  $(\varphi \wedge \psi)$  és (d)  $(\varphi \rightarrow \psi)$ .

(iii) Ha  $\varphi$  formula, akkor

$(\forall x\varphi)$  és  $(\exists x\varphi)$  is formula.

(iv) Csak az (i)–(iii)-ban leírtak véges sokszori alkalmazásával kapunk formulát.

Egy formulában adott helyen fellépő  $x_i$  változójel szabadon fordul elő, ha nincs benne egyetlen  $\forall x_i(\dots x_i \dots)$ , vagy pedig egy  $\exists x_i(\dots x_i \dots)$  alakú részformulában sem. Például a  $\forall x(x+y=1) \wedge \neg(x=y)$  formulában  $x$  első két előfordulása nem szabad, a harmadik pedig igen. A formula *szabad változójának* nevezzük azokat a változókat, amelyek valahol szabadon fordulnak elő. A formula  $\varphi(x, \dots, y)$  alakjában  $x, \dots, y$  mindig a formula szabad változóit jelentik. Egy formula *zárt*, ha nincs benne szabad változó. A zárt formulákat *mondatoknak* is hívjuk.

Állításaink elemi állításokból épülnek fel logikai jelek segítségével. Ilyen elemi állítások például: „az  $ABC$  háromszög derékszögű”, „ $x$  tanuló”, „ $x$  országnak  $y$  a fővárosa”, „ $x=y$ ”, „ $x$  maradék nélkül osztja  $y$ -t”. Az ilyen állítások egy dolog tulajdonságát vagy több dolog kapcsolatát fejezik ki. Az ilyen kapcsolatok leírását engedi meg a formulák definíciójának (i) pontja. Az elemi állításokból logikai úton más állításokat kaphatunk, ezt fejezi ki (ii) és (iii).

Egy példán keresztül látszik, hogyan lehet egy magyar nyelven felírt állítást átfordítani valamilyen matematikai nyelvre. Legyen a nyelv a természetes számok nyelve, az állítás pedig a következő:

„Végtelen sok prímszám van.”  
Szerencsére a prímszámok fogalmát eleve a  $+$  és  $\cdot$  műveletek segítségével definiáltuk, így könnyű dolgonk lesz. A „végtelen sok” kifejezés helyett pedig majd azt fogalmazzuk meg, hogy tetszőleges természetes számmal van nagyobb prím. Először az állításnak könnyen formulázható részét írjuk fel:

$$\forall x \exists y (y \text{ prím} \wedge y > x).$$

Az „ $y > x$ ” részformulát könnyen fordíthatjuk:  $\exists z(x+z=y)$ . Mivel természetes számokról van csak szó, ez nyilván csak akkor lehet, ha  $y > x$ . Kicsit bonyolultabb azt felírni, hogy „ $y$  prím”. Egy természetes számról akkor mondjuk, hogy prím, ha nincs más osztója, csak önmaga és az 1. Az 1 számot, ami teljesíti ezt a tulajdonságot, nem tekintjük prímnak. Így az „ $y$  prím” definíció szerint a következő:

$$\forall z(z|y \rightarrow (z=1 \vee z=y)) \wedge (y \neq 1)$$

„ $y \neq 1$ ”-t könnyen fordíthatjuk:  $\neg(y=1)$ . Ez már formula. Végül „ $z|y$ ” pontosan akkor, ha van olyan  $u$  szám, hogy  $u \cdot z = y$ . Ezt fordítva:  $\exists u(u \cdot z = y)$ .

Így az „ $y$  prím” a következőnek felel meg:

(1)  $\forall z(\exists u(u \cdot z = y) \rightarrow (z=1 \vee z=y)) \wedge \neg(y=1)$ .

Összefoglalva mindezt, eredeti állításunk fordítása a következő:

$$\forall x \exists y (\forall z(\exists u(u \cdot z = y) \rightarrow (z=1 \vee z=y)) \wedge \neg(y=1)) \wedge \exists z(x+z=y).$$

Világos, hogy ez a formula gyakorlati célokra vajmi kevésbé használható. Nem is kell állításainkat ilyen alakra hoznunk. Abban kell csak biztosnak lennünk, hogy azok az állítások, amelyeket használunk, egyértelműen lefordíthatók nyelvünkre, ha jön valaki, aki kételkedik ebben, annak meg tudjuk mutatni. Így az „ $y$  prím” kifejezést bátran használhatjuk, s ha valakinek ez nem felel meg, azt mondjuk: Vedd az (1) formulát, tedd mindenütt az „ $y$  prím” helyébe, s amit így kapsz, az már neked is megfelelő formula lesz.

Formuláinkat sosem írjuk ki teljes részletességgel, de tudjuk, hogy ezt mindig megtehetjük.

4. pl.

4. feladat. Legyen  $L = \{!, \square, \times, \equiv, ?\}$ , a természetes számok nyelve, ahol a jelek rendre a rákövetkezés, összeadás, szorzás, egyenlőség és 1 jelei. Formulái-e az  $L$  nyelvnek a következő jelsorozatok:

- (a)  $\forall x \exists y (x \square y > z) \wedge \exists y (y \square ? \square ? \equiv \square)$ ,  
(b)  $\forall x \exists y (x \square ? \equiv z) \vee \exists x (y \times z \equiv x)$   
(c)  $\forall y \exists z ((x \square y) \wedge (x \square z) \equiv u)$ .

5. pl.

5. feladat. Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyek zártak, melyek a bennük szabadon előforduló változók!  $x, y, z$  változójelek,  $q(x)$ ,  $\psi(x, y, z)$ ,  $\chi(x, y)$  formulák.

- (a)  $q(x) \wedge \forall x \exists y \psi(x, y, z)$   
(b)  $\exists z (\chi(x, z) \wedge \forall x \exists y \chi(x, y) \wedge \forall x \exists y q(x))$   
(c)  $\forall x \exists y \forall z (q(x) \rightarrow \chi(x, y))$ .

6. pl.

6. feladat. Legyen  $N$  egy egyváltozós relációjel, jelentése: „nőnek lenni”.  $H$  jelentése: „ $x$  és  $y$  házastársak”,  $\bar{H}$  kétváltozós relációjel. A  $G$  kétváltozós relációjel, jelentése: „ $x$  gyermeke  $y$ -nak”, az első változója jelenti a gyereket. Ezek segítségével írjunk fel olyan formulákat, aminek jelentése rendre a következő:

- (a)  $x$  anyja  $y$ -nak,  
(b) mindenkinek van apja és anyja,  
(c)  $x$  és  $y$  testvérek,  
(d)  $x$  nagypapja  $y$ -nak,  
(e)  $x$  és  $y$  unokatestvérek,  
(f) mindenkinek egyetlen anyja van,  
(g)  $x$  anyósa  $y$ -nak,  
(h) a házastársak közül az egyik férfi, a másik nő.

7. pl.

7. feladat. Legyen  $R(x, y)$  egy kétváltozós relációjel. Mit jelentenek az alábbi formulák:

- (a)  $\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$ ,  
(b)  $\exists x (\forall y R(x, y) \rightarrow R(x, x))$ ,  
(c)  $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$ .

8. pl.

8. feladat. Legyen  $H$  a sík háromszögeinek,  $A$  pedig a budapesti állatkert lakóinak halmaza. Adjunk meg ezeken a halmazokon relációkat, műveleteket és konstansokat. Konstruáljunk olyan nyelveket, melyek ezek leírására alkalmasak.

**Interpretációk**

A matematikai nyelveket azért konstruáltuk meg, hogy ezen a nyelven beszélhessünk struktúráinkról. Egyelőre még semmilyen kapcsolat sincs nyelv és struktúra közt. Ezen úgy segíthetünk, hogy egy adott struktúra műveleteinek, relációinak és konstansainak egy-egy alkalmas jelet felcímetünk meg. Az ilyen típusú megfeleltetést hívjuk *interpretációnak*. A pontos definíció a következő.

**Definíció:**

Legyen  $\mathcal{M} = (A; M_1, \dots, M_p; P_1, \dots, P_q; C_1, \dots, C_s)$  tetszőleges struktúra,  $L = \{f_1, f_2, \dots, f_p; r_1, \dots, r_q; k_1, \dots, k_s\}$  az  $\mathcal{M}$  leírására alkalmas tetszőleges nyelv. Nézzük azt az  $I$  megfeleltetést, amelyik az  $L$  nyelv  $i$ -edik művelet-jeléhez hozzárendeli az  $\mathcal{M}$  struktúra  $i$ -edik műveletét,  $I(f_i) = M_i$ ; az  $L$  nyelv  $j$ -edik relációjelenek megfelelteti az  $\mathcal{M}$   $j$ -edik relációját,  $I(r_j) = P_j$ ; végül az  $L$  nyelv  $l$ -edik konstans jelének az  $\mathcal{M}$   $l$ -edik konstansát rendeli,  $I(k_l) = C_l$ . Ha úgy soroltuk fel nyelvünk jeleit, hogy a fenti megfeleltetés  $n$ -változós műveletjelekhez (illetve relációjelekhez) éppen  $n$ -változós műveleteket (reláció-

kat) feleltet meg, akkor az  $I$  megfeleltetést az  $L$  nyelv  $\mathcal{A}$ -beli interpretálásának nevezzük.

Nem szabad összekevernünk a jeleket a nekik megfeleltetett valódi objektumokkal. A jelek csak a fejünkben, a papíron léteznek, míg a nekik megfelelő relációk, műveletek a „valóság” egy darabjában, az  $\mathcal{A}$  struktúrán hatnak. Természetesen jeleink igen szoros kapcsolatban állnak velük, hiszen azoknak mintegy a nevei.

Képzeljük, hogy adott egy  $t$  kifejezés, amelyben az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  változójelek szerepelnek,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  pedig az  $\mathcal{A}$  individuumtartomány adott jelei. Ha a  $t$ -ben szereplő művelet- és konstansjeleket  $\mathcal{A}$ -beli interpretáltjukra cseréljük, az  $x_i$ -k helyére rendre az  $a_i$ -ket írjuk, s az így keletkező műveleteket végrehajtjuk, eredményül  $\mathcal{A}$  egy elemét kapjuk. Ezt a  $t$  kifejezés  $a_1, a_2, \dots, a_n$  értékelésénél kapott értékének nevezzük. A pontos definíció a következő:

### Definíció:

A  $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$  kifejezés értékét az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  értékelés mellett a következőképpen kapjuk meg:

- (i) Ha  $t = x_i$  vagy  $t = c_j$ , akkor értéke  $a_i$ , illetve  $C_j$ .
- (ii) Ha  $t = f_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$  és  $t_j$ -k értékei rendre  $b_j$ , akkor  $t$  értéke  $M_i(b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathcal{A}$ .

A  $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$  értékét  $t[a_1, a_2, \dots, a_n]$ -nel jelöljük. A kifejezés értéke mindig a megfelelő individuumtartomány eleme. Ha például  $\mathcal{A} = (N, +, \cdot)$ ,  $L = (f_1, f_2)$ ,  $I(f_1) = +$  és  $I(f_2) = \cdot$ ; végül  $t(x_1, x_2) = f_1(f_2(x_1, x_2), x_1)$ , akkor  $t[1, 2] = 5$ . Ugyanis  $x_1$  értéke  $1$ ,  $x_2$  értéke  $2$ ,  $f_2(x_1, x_2)$  értéke  $1 \cdot 2 = 2$ ,  $f_1(f_2(x_1, x_2), x_1)$  értéke  $2 + 2 = 4$ , s így  $t$  értéke  $4 + 1 = 5$ .

Első lépésben értékeket adtunk a változójeleknek, ezek segítségével kiszámítottuk a kifejezések értékét, most pedig definiálni fogjuk a formulák értékét. Ez az érték már nem  $\mathcal{A}$ -beli érték lesz, hanem a formula az értékelés mellett vagy igaz vagy hamis.

Legyen  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  az  $L$  nyelven felírt olyan formula, melynek szabad változó  $x_1, x_2, \dots, x_n$  közül kerülnek ki. Legyenek még  $a_1, a_2, \dots, a_n$  az  $\mathcal{A}$  elemei. Definálni fogjuk, hogy mikor teljesül a  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  formula  $\mathcal{A}$ -n az  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = \bar{a}$  értékelés mellett, jelben:

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \text{vagy} \quad \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}].$$

Ugyanezt a tényt más szavakkal is kifejezhetjük:  $\varphi[\bar{a}]$  igaz  $\mathcal{A}$ -n,  $\mathcal{A}$  modell  $\varphi[\bar{a}]$ -ra.

### Definíció:

(i) Legyen  $\varphi = r_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$  formula, a  $t_j$ -k értékei rendre  $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathcal{A}$  az  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  értékelés mellett.

$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$  csakkor, ha  $(b_1, b_2, \dots, b_m) \in P_i$ , vagyis a  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$   $m$ -es  $P_i$  relációban áll.

(ii)  $\mathcal{A} \models (\neg \varphi)[\bar{a}]$  csakkor, ha nem igaz, hogy  $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ ;

$\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[\bar{a}]$  csakkor, ha  $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$  és  $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$ ;

$\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[\bar{a}]$  csakkor, ha  $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$  vagy  $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$ ;

$\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\bar{a}]$  csakkor, ha valahányszor  $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ , akkor egyben  $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$ .

(iii)  $\mathcal{A} \models \forall x \varphi[a_1, a_2, \dots, a_n]$  csakkor, ha akárhogyan is választunk egy  $a \in \mathcal{A}$  elemet, mindig  $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n]$ ;

$\mathcal{A} \models \exists x \varphi[a_1, a_2, \dots, a_n]$  csakkor, ha van olyan  $a \in \mathcal{A}$ , hogy

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n].$$

Legyen megint  $\mathcal{A} = (N, =, +, \cdot, 1)$  és  $L = (=, \square, \times, ?)$ . Ekkor persze  $I(\square) = +$ ,  $I(\times) = \cdot$ ,  $I(?) = 1$ ,  $I(=) = =$ . Vajon a  $\varphi(y) = \neg \exists x (\square(x, y) \equiv \square(?, ?))$  formula milyen értékelés mellett lesz igaz és milyen értékelés mellett lesz hamis, azaz  $n \in N$  esetén mikor lesz  $\mathcal{A} \models \varphi(n)$ ? Végiggondolva az értékelés definícióját, rögtön látszik, hogy az a kérdés, van-e olyan  $m$ , hogy  $n + m = 2$ . Mivel  $n$  és  $m$  természetes számok, ez csak  $n = m = 1$  esetben fordulhat elő. Ha tehát  $n > 1$ , akkor semmilyen  $m$  természetes számra nem teljesül a  $\square(x, y) = \square(?, ?)$  formula az  $(n, m)$  értékelés mellett, tehát ekkor  $\mathcal{A} \models \varphi(n)$ . Ha viszont  $n = 1$ , akkor a fenti formula igaz lesz az  $(1, 1)$  értékelés mellett, tehát  $\mathcal{A} \not\models \varphi(1)$ -re. Így például  $\mathcal{A} \models \exists y \varphi(y)$ , de  $\mathcal{A} \not\models \forall y \varphi(y)$ .

Példánk azt is mutatja, hogy ha  $\varphi$  tartalmaz szabad változót, akkor az, hogy  $\varphi$  teljesül-e  $\mathcal{A}$ -n vagy sem, ténylegesen függ az értékeléstől. Nem nehéz bizonyítani, hogy ha  $\varphi$  zárt, akkor tetszőleges értékelés mellett vagy teljesül vagy nem. Erre utal a következő tétel:

**Tétel:** Ha  $\varphi$  zárt formula, akkor  $\mathcal{A} \models \varphi$  és  $\mathcal{A} \models \neg \varphi$  közül pontosan az egyik áll fenn, függetlenül az értékeléstől.

A matematikus úgy dolgozik, hogy a vizsgált struktúra néhány jellemző tulajdonságát, azaz a rajta igaz formulákat, állításokat kiemeli, ezeket axiómákként kezeli. Ebből következik, hogy vizsgálati körében már nemcsak az az egy struktúra áll, hanem az összes olyan struktúra, amely eleget tesz az axiómáknak.

Az alábbi definíció éppen ennek a precíz megfogalmazására szolgál.

### Definíció:

Legyen  $\Gamma$  az  $L$  nyelven felírt formulák halmaza. Azt mondjuk, hogy  $\mathcal{A}$  a  $\Gamma$  modellje, ha minden  $\Gamma$ -beli  $\varphi$  formulára  $\mathcal{A} \models \varphi$  teljesül. Jelben:  $\mathcal{A} \models \Gamma$ .

A  $\varphi$  formula a  $\Gamma$  formulahalmaz következménye, ha valahányszor egy  $\mathcal{A}$  struktúrára  $\mathcal{A} \models \Gamma$  teljesül, akkor egyben  $\mathcal{A} \models \varphi$ . Ha  $\varphi$  a  $\Gamma$  következménye, azt így írjuk:  $\Gamma \models \varphi$ .

**9. feladat.** Konstruáljunk olyan  $\mathcal{A}$  struktúrákat, ahol a következő formulák igazak, illetve hamisak! (Ez összesen hat struktúrát jelent.)

(a)  $\forall x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(z, x))$ ;

(b)  $\exists x \forall y (P(f(x), x) \wedge P(y, x))$ ;

(c)  $\forall x \exists y (G(x, y) \wedge \neg G(y, x))$ .

**10. feladat.**  $(\Gamma \vdash \varphi)$  jelentse azoknak a formuláknak a halmazát, amelyeket úgy kapunk hogy  $\Gamma$  formulához hozzávesszük a  $\varphi$  formulát. Legyen  $\varphi$  zárt formula, s bizonyítsuk be, hogy ha  $(\Gamma \vdash \varphi) \models \psi$ , akkor  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ .

**11. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy a következő két formula tetszőleges struktúrán teljesül:

(a)  $(\forall x_1 (\forall x_2 \varphi)) \rightarrow (\forall x_2 \varphi)$ ;

(b)  $\neg (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \neg \psi)$ .

### Levezetés és a teljességi tétel

Első pillantásra szinte lehetetlennek látszik azoknak a formuláknak a felsorolása, vagy valamilyen értelemben vett rendezése, amelyek minden olyan struktúrán teljesülnek, amely egy rögzített formulahalmazt, (axiómarendszert) kielégít. Ebben a részben a célunk egy ilyen eljárás megadása. Mint már a 14. feladatban is láttuk, vannak olyan formulák, amelyek tetszőleges struktúrán teljesülnek, ezeket logikailag igaz formuláknak nevezzük. Az igaz formulák közül néhánynak különleges és aránylag egyszerű szerkezete van.

Ezek például a következők:

- (i)  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ ;
- (ii)  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi) \rightarrow (\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ ;
- (iii)  $(\neg \psi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow ((\neg \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$ ;
- (iv)  $\forall x_i \varphi(x_i) \rightarrow \varphi(t)$ , ahol  $t$  kifejezés,
- (v)  $\forall x_i (\varphi \rightarrow \psi(x_i)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x_i \psi(x_i))$ , ahol  $\varphi$ -ben nem fordul elő szabadon  $x_i$ .

Nem nehéz meggyőződnünk arról, hogy az (i)–(v) formulák mindegyike teljesül egy tetszőleges struktúrán, azaz igazak. Az (i)–(v) típusú formulákat *logikai axiómáknak* nevezzük. Megjegyezzük, hogy minden pontban végtelen sok formulát soroltunk fel, így végtelen sok logikai axiómánk van, de ezek csak véges sok típusba tartoznak.

Olyan eljárásokat kerestünk, melyek segítségével igaz formulákból újra igaz formulához jutunk. Ilyen eljárásokat mindenki jól ismer, aki matematikával foglalkozik, biláboz jutunk. Ilyen eljárásokat mindenki jól ismer, aki matematikával foglalkozik, biláboz jutunk. Ilyen eljárásokat mindenki jól ismer, aki matematikával foglalkozik, biláboz jutunk. Ilyen eljárásokat mindenki jól ismer, aki matematikával foglalkozik, biláboz jutunk.

### Definíció:

Legyen adva formuláknak egy  $\Gamma$  halmaza.  $\Gamma$ -ból törtéző *levezetésnek* nevezzük formulák egy véges  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  sorozatát, ha mindegyikük vagy logikai axióma, vagy  $\Gamma$  eleme, vagy egy, illetve két, megelőző formulából származik az általánosítási, illetve a leválasztó szabály segítségével. Egy  $\varphi$  formula *levezethető*  $\Gamma$ -ból, vagy más szóval a  $\Gamma$  *tétele*, ha van olyan  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  levezetés  $\Gamma$ -ból, hogy  $\varphi = \varphi_n$ . Jelben  $\Gamma \vdash \varphi$   $q$ -t *tautológiának* nevezzük, ha levezethető az üres halmazból, azaz  $\vdash \varphi$ .

Definícióinkban a bizonyítás jól ismert fogalmát definiáltuk, tétel itt is pontosan az, ami bizonyos előfeltevésekből, axiómákból logikai szabályok segítségével megkapható. Egyszerű példa levezetésére a következő:

$$\{\varphi, \forall x_1 \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \forall x_1 \psi.$$

A levezetés:  $\varphi_1 = \varphi$   
 $\varphi_2 = \forall x_1 \varphi$   
 $\varphi_3 = \forall x_1 \varphi \rightarrow \psi$   
 $\varphi_4 = \psi$   
 $\varphi_5 = \forall x_1 \psi$

$\Gamma$  eleme  
 $\varphi_1$ -ből általánosítással  
 $\Gamma$  eleme  
 $\varphi_2$  és  $\varphi_3$ -ből leválasztással  
 $\varphi_4$ -ből általánosítással.

A  $\Gamma$ -ból levezethető formulák szoros kapcsolatban állnak a  $\Gamma$  következményeivel. Aránylag könnyű annak a kimutatása, hogy ha  $\varphi$  és  $\varphi \rightarrow \psi$  következményei  $\Gamma$ -nak, akkor egyben  $\psi$  is, és ha  $\varphi(x_i)$  következménye  $\Gamma$ -nak, akkor egyben  $\forall x_i \varphi(x_i)$  is. Összefoglalva ezt azzal a ténnyel, hogy a logikai axiómák minden struktúrán teljesülnek, a következő tételt kapjuk:

**Tétel:** Ha  $\Gamma \vdash \varphi$ , akkor egyben  $\Gamma \models \varphi$ .

Természetesen merül fel az a kérdés, hogy vajon fordítva nem igaz-e az állítás. A válaszadási segíti elő a következő definíció.

### Definíció:

$\Gamma$  *konzisztens*, ha van modellje, azaz ha van olyan  $\mathcal{M}$  struktúra, hogy  $\mathcal{M} \models \Gamma$ .  $\Gamma$  *ellentmondástalan*, ha nem vezethető le belőle  $\varphi \wedge \neg \varphi$  alakú formula. (A „konzisztens” szó magyarra fordítva azt jelenti ugyan, hogy „ellentmondástalan”, de két teljesen különböző dolgot jelent a matematikában!!)

Például minden olyan  $\Gamma$  axiómarendszer, amelynek van modellje, ellentmondástalan. Ha ugyanis  $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg \varphi$ , akkor erre a modellre az előző tétel szerint  $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \neg \varphi$ , azaz  $\mathcal{M} \models \varphi$  és  $\mathcal{M} \models \neg \varphi$ . De jól tudjuk, hogy ez utóbbi kettő közül *legfeljebb* az egyik teljesülhet. Ezért az üres axiómarendszer, amelyek így csak (!) a logikai axiómákból áll, ellentmondástalan, hiszen tetszőleges struktúra modell rá. Világos, hogy csak ellentmondástalan  $\Gamma$ -nak lehet modellje.

**Tétel:** Ha  $\Gamma$  ellentmondástalan, akkor van modellje, tehát konzisztens. Ezzel ekvivalens, hogy ha  $q$  a  $\Gamma$  következménye ( $\Gamma \models q$ ), akkor egyben le is vezethető  $\Gamma$ -ból ( $\Gamma \vdash q$ ), a levezetés és a következmény azonos fogalmak.

A fenti tételt Kurt Gödel német matematikus bizonyította be először 1930-ban, és Gödel-féle teljességi tétel néven ismert. (A bizonyítás igen nehéz és bonyolult.) A másik, a fenti tétellel ekvivalens megfogalmazás a következő:

**Tétel:** Ha  $q$  nem vezethető le  $\Gamma$ -ból, akkor  $\Gamma$ -nak van olyan  $\mathcal{M}$  modellje is, hogy még  $\mathcal{M} \models \neg q$ .

**11. feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az utolsó két tétel állításai ekvivalensek!

Egy rövid táblázatban foglaltuk össze eddigi fogalmainkat. Gödel teljességi tétele szerint az egy sorban álló fogalmak azonosak:

$\Gamma$ ellentmondástalan	$\Gamma$ konzisztens
$\Gamma$ -ból levezethető $\varphi$ , $\Gamma \vdash \varphi$	$\Gamma$ -ból következik $\varphi$ , $\Gamma \models \varphi$
$\varphi$ tautológia, $\vdash \varphi$	$\varphi$ igaz, $\models \varphi$

Lassan a végére jutottunk azoknak a pozitív eredményeknek, amelyek igazolják, hogy a matematikai nyelv és struktúra fogalmát jól definiáltuk. Ki tudtuk mutatni, hogy axiómarendszerünk hűen tükrözi *összes modelljünk*. Ezen a kijelentésen azt értjük, hogy ha  $\Gamma$  konzisztens, akkor  $\Gamma$  következményei és a  $\Gamma$ -ból levezethető formulák megegyeznek. De ezen belül *egyes konkrét modellek* viselkedése nagyon különböző lehet, ugyanannak a  $\Gamma$  axiómarendszernek egyes modelljében ez vagy az a formula igaz vagy hamis lehet. Az ilyen állításokat  *$\Gamma$ -tól függetlennek* nevezzük. Egy  $\Gamma$  formula éppen akkor független  $\Gamma$ -tól, ha  $\{\Gamma, \varphi\}$  és  $\{\Gamma, \neg \varphi\}$  egyaránt ellentmondástalan. Hogy vannak független állítások, az egyáltalán nem nyilvánvaló.

### A természetes számok és a Gödel-féle nem-teljességi tétel

A matematika egyik leggyakrabban használt axiómarendszerét mutatjuk be, a természetes számok axiómarendszerét. A természetes számok tulajdonságait először Peano próbálta megfogalmazni. A matematikai logika, s különösen annak formalizmusa sokat köszönhet az ő tevékenységének. Az itt közölt  $T$  axiómarendszer a Peano-féle rendszer megfelelő változata.

A természetes számok nyelve egy darab egyváltozós, két darab kétváltozós műveletjelet tartalmaz: ezek a ' (a rákövetkezés jele), illetve a + és a  $\cdot$  jelek, (amelyek az összeadás, és szorzás szokásos jelei). Csupán technikai okokból nem az egy, hanem a nulla számot tekintjük a legkisebb természetes számnak. Nyelvünk egyetlen konstans-jele így a 0. Egyetlen kétváltozós relációjelünk az egyenlőség = jele. Tehát  $L = \{', +, \cdot, =, 0\}$ .

Axiómáink, tehát  $T$  elemei a következők:

- (T1)  $\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (x = z \rightarrow y = z))$
- (T2)  $\forall x \forall y (x = y \rightarrow x' = y')$
- (T3)  $\forall x \neg (0 = x')$
- (T4)  $\forall x \forall y (x' = y' \rightarrow x = y)$
- (T5)  $\forall x (x + 0 = x)$
- (T6)  $\forall x \forall y (x + y' = (x + y)')$
- (T7)  $\forall x (x \cdot 0 = 0)$
- (T8)  $\forall x \forall y (x \cdot y' = (x \cdot y) + x)$
- (T9)  $\varphi(0) \rightarrow (\forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')) \rightarrow \forall x \varphi(x))$ .

A (T1)–(T8) axiómák az összeadás, szorzás és rákövetkezés jól ismert tulajdonságait formalizálják. A (T9) pontban nem egy axiómát adtunk meg, hanem végtelen sokat, a  $\varphi(x)$  formula minden lehetséges választására egyet-egyet. Az ilyen típusú axiómákat *axiómasémának* hívjuk. Az axiómasémákra a matematika minden területén szükség van. Már a logikai axiómák felsorolásakor használtuk őket.

A (T9) axiómaséma a teljes indukció átfoglalozása. Szokásos megfogalmazásban ez így hangzik:

„Legyen  $K$  a természetes számok egyik tulajdonsága. Tegyük fel, hogy a nulla rendelkezik ezzel a tulajdonsággal és valahányszor egy természetes szám rendelkezik vele, akkor a rákövetkezője is. Ekkor valamennyi természetes szám rendelkezik a  $K$  tulajdonsággal.”

A problémát ebben a megfogalmazásban az okozza, mit értünk tulajdonságon. Mint mindenütt, itt is ez egy szabad változójú  $\varphi(x)$  formulát jelent. Egy  $n$  természetes szám rendelkezik a tulajdonsággal, ha ez a  $\varphi(n)$  igaz, különben nem. Ezek után könnyen adódik a teljes indukció fenti, formalizált alakja.

A (T1)–(T9) pontokban felsorolt axiómák együtt adják a természetes számok  $T$  axiómarendszerét. Ahhoz, hogy tényleg jogunk legyen ezt a rendszert a természetes számok axiómarendszerének nevezni, meg kell mutatni, hogy a  $T$  segítségével fel tudjuk építeni az elemi aritmetikát: be tudjuk látni az összeadás és szorzás szokásos összefüggéseit, definiálhatjuk a különbséget stb. Ezt valóban meg lehet tenni, de mivel arra törekedtünk, hogy a lehető legkevesebb axiómát kelljen kimondanunk, ez nagyon soká tartana, és nem is ez a célunk.

Megemlíttük azonban a  $T$  axiómarendszerre vonatkozó nagyon fontos tételt, amit még egyetlen más bonyolultabb rendszerre sem sikerült bebizonyítani.

**Tétel:** (Gentzen, 1936). A természetes számok  $T$  axiómarendszerére ellentmondástalan.

Hogy megértsük ennek a tételnek a fontosságát, a modellelmélet még egy tételét említtjük meg. Csak olyan axiómarendszerekre szorítkozunk, amelyekben véges sok lépésben el tudjuk dönteni egy tetszőleges formuláról, hogy axióma-e vagy sem. Ez az elvárás meglepőnek tűnhet, de sajnos vannak olyan dolgok, amiknek létezéséről tudunk, de a dolgot mégsem tudjuk teljes egészében megragadni. Így lehetséges, hogy valaki úgy adja meg az axiómákat, hogy nem tudjuk eldönteni, mi axióma és mi nem.

Másodszor feltesszük, hogy axiómarendszerünkben felépíthető a természetes számok aritmetikája. Világos, hogy ezekkel a tulajdonságokkal a matematikában használatos axiómarendszerek többsége rendelkezik. Az említett két tulajdonságnak eleget tevő axiómarendszert *erősnek* hívjuk. Ezekről szól a Gödel-féle *nemteljességi tétel*:

**Tétel:** Legyen  $\Gamma$  az  $L$  nyelvben felírt ellentmondástalan, erős axiómarendszer. Ekkor van az  $L$  nyelvnek olyan (Cons  $\Gamma$ )-val jelölt formulája, ami azt fejezi ki, hogy a rendszer ellentmondástalan, de ez a formula független  $\Gamma$ -tól, tehát sem (Cons  $\Gamma$ ), sem a tagadása nem vezethető le  $\Gamma$ -ból.

A tétel tehát rögtön példát is mutat egy független állításra minden erős axiómarendszerben. Ráadásul ezt az állítást nagyon is szeretnénk eldönteni, hiszen éppen azt fejezi ki, hogy a rendszer ellentmondástalan.

Ezzel befejeztük a matematikai logika egyik legfontosabb részterületének egy ugyancsak választás és rövidre fogott áttekintését. A matematikai logika a matematika egyik határterülete, sok vonatkozásban kapcsolódik a logikához és a filozófiához. A kérdés iránt érdeklődők magyarul is sok érdekes könyvhöz juthatnak.

Úry László

*A cikkben előforduló jelölések és rövidítések*

$A$	a struktúra individuumtartománya
$\mathfrak{A}$	tetszőleges struktúra
$a_i$	$A$ tetszőleges eleme
$\mathfrak{A}$	$A$ rendezett $n$ -eseinek halmaza
$\bar{a}$	$\bar{a}$ egy eleme
$\mathfrak{M} = \Gamma$	$\mathfrak{M}$ modell a $\Gamma$ -ra
$\mathfrak{M} = \varphi$	$\mathfrak{M}$ modell a $\varphi$ -re tetszőleges értékelésnél
$\mathfrak{M} = \varphi(\bar{a})$	$\mathfrak{M}$ modell a $\varphi$ -re az $\bar{a}$ értékelés mellett
$c_i$	tetszőleges konstans
$\mathcal{E}$	a ma élő emberek összessége
$\mathcal{E}^v$	a valaha élt emberek összessége

$f_i$	műveletjel
$\mathcal{G}$	a geometria struktúrája
$\mathcal{H}$	„háztársaknak lenni”
$I$	interpretáció
$i, j, l$	indexek
$k_i$	konstansjel
$L$	matematikai nyelv
$M_i$	művelet
$P_j$	reláció
$p$	a struktúra műveleteinek száma
$r_j$	relációjel
$q$	$u$ struktúra relációinak a száma
$s$	a struktúra konstansainak a száma
$t$	kifejezések rövidítése
$T$	a Peano-féle axiómarendszer
$x_i$	változójel
$y_i$	változójelek
$\mathfrak{W}$	a vektorok struktúrája
$\Gamma$	formulák halmaza, axiómarendszer
$\Gamma - \varphi$	$\Gamma$ -ből levezethető $\varphi$
$\{\Gamma, \varphi\}$	$\Gamma$ formulái és a $\varphi$ formula
$\wedge$	a rákövetkezés jele
$\vee$	és
$\neg$	vagy
$\neg$	nem
$\rightarrow$	ha, ... akkor
$\forall$	minden egyes (az ún. univerzális kvantor)
$\exists$	van olyan (az ún. egzisztenciális kvantor)
csakkor	akkor és csak akkor.

*A cikkben szereplő fogalmak és tételek*

$A$ -beli konstans	individuumtartomány
$A$ -beli rendezett $n$ -es	igaz formula
$A$ -n értelmezett reláció	interpretáció
axiómarendszer	kifejezés
axiómaséma	konstansjel
általánosító szabály	konzisztens
ellentmondástalan	következmény
elsőrendű nyelv	leválasztási szabály
erős axiómarendszer	levezetés
értékelés	logikai axióma
formula	logikai jel
Gentzen tétele	matematikai logika
Gödel teljességi tétele	matematikai nyelv
Gödel nem-teljességi tétele	modell
mondat	rendezett pár
modus ponens	Russel-féle, antinómia
művelet	struktúra
nyelv	szabad változó
Peano-féle axiómarendszer	tétel
reláció	tautológia
relációjel	változójel
rendezett $n$ -es	zárt formula

*Ajánlott irodalom:*

Kalmár L.: A matematika alapjai II. — Szeged, Egyetemi jegyzet.  
 Klaus, G.: Bevezetés a formális logikába — Bp., Gondolat, 1963.  
 W. V. O. Quine: A logika módszerei — Bp., Akadémia, 1968.  
 Ruzsa I. — Urbán J.: Matematikai logika, a Világnézetű nevelésünk természettudományos alapjai IV. kötetében.  
 Varga T.: Matematikai logika (kezdőknek) — Bp., Tankönyvkiadó, I. 1962., II. 1966.