ÓKORI GÖRÖG PROBLÉMÁK: SZÖGHARMADOLÁS

Boldizsár Tamás

CRS37H

2019. 06. 11.

ÓKORI GÖRÖG PROBLÉMÁK

- Kör négyszögesítése
- Kockakettőzés
- Szabályos hétszög szerkesztése
- **SZÖGHARMADOLÁS**

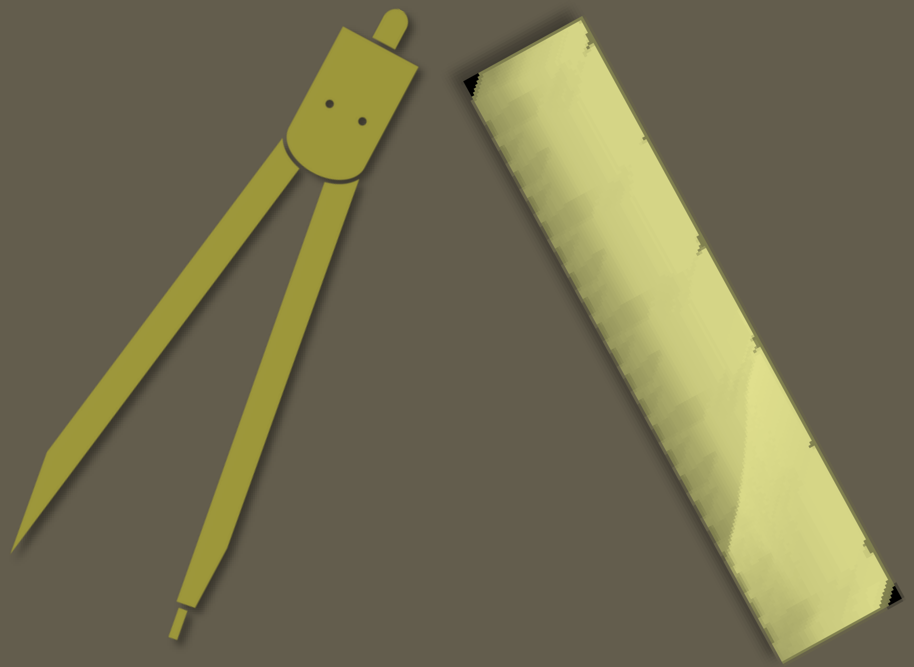
→ euklideszi módon nem megszerkeszthetők

EUKLIDESZI SZERKESZTÉS

- Csak **körző** és **vonalzó**
- Használat csak meghatározott módokon:
  - Két ponton áthaladó egyenes megrajzolása
  - Két pont távolságának körzőnyílásba vétele
  - Adott pont körül kör rajzolása
  - Egyenesek és körök metszéspontjainak keresése

↓ véges számú ismétlés

euklideszi módon szerkeszthető probléma



NEM EUKLIDESZI SZERKESZTÉS

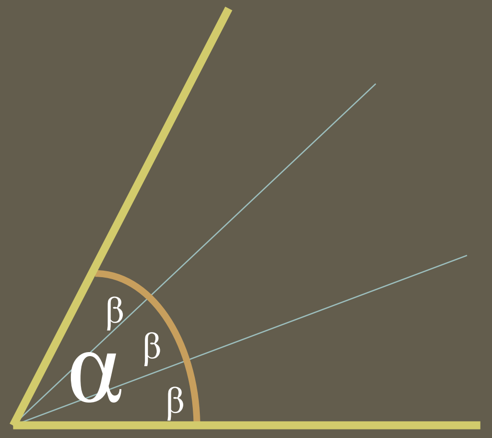
- Nem ragaszkodunk az euklideszi szerkesztéshez

- A szögharmadolás így már lehetséges

SZÖGHARMADOLÁS EUKLIDESZI SZERKESZTÉSSEL

A SZÖGHARMADOLÁS FOGALMA

- Egy tetszőleges szög három egyenlő részre osztása

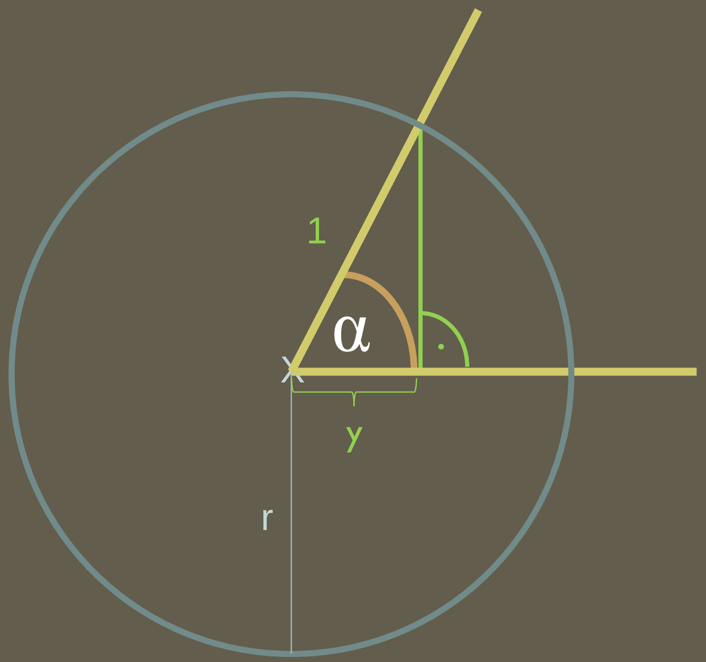


$\alpha = 3\beta$

- **1837, Pierre Wantzel** *(1814 – 1848, francia matematikus):*
  igazolta, hogy a szögharmadolás körzővel és vonalzóval – tehát euklideszi módon – lehetetlen

BIZONYÍTÁS I.

- Ha egy szög megszerkeszthető, akkor tudunk olyan szakaszt is szerkeszteni, melynek hossza egyenlő a szög koszinuszával.



$r = 1$

$y = \cos\alpha$

BIZONYÍTÁS II.

- Mutassuk meg, hogy adott egységnyi hosszú szakaszból nem szerkeszthető $\cos 20°$ hosszúságú szakasz! (Ebből következik, hogy nem szerkeszthető 20°-os szög, és így a 60° nem harmadolható.)

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$$

(trigonometriai összefüggés)

$$\downarrow$$

$$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$$

$\cos 20° = x,\ \cos 60° = \frac{1}{2}$

$$\downarrow$$

$$\boxed{4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0}$$

BIZONYÍTÁS III.

$$\boxed{4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0}$$

- A geometriai problémát algebrai problémává alakítottuk át.
- A bal oldalon álló polinom irreducibilis a racionális számtest felett, azaz nem bontható tovább két racionális polinom szorzatára.
- Azok a szerkesztési feladatok, amelyek irreducibilis harmadfokú egyenlethez vezetnek, nem oldhatók meg euklideszi szerkesztéssel (Gauss, 19. sz.).

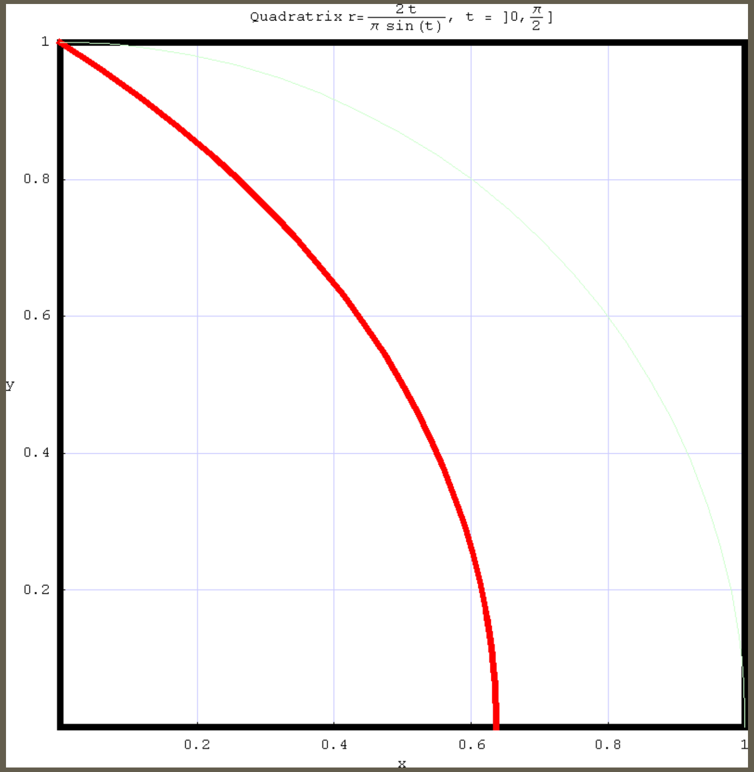
$$\Downarrow$$

Beláttuk, hogy tetszőleges szöget nem lehet euklideszi módszerrel megszerkeszteni.

SZÖGHARMADOLÁS NEM EUKLIDESZI SZERKESZTÉSSEL

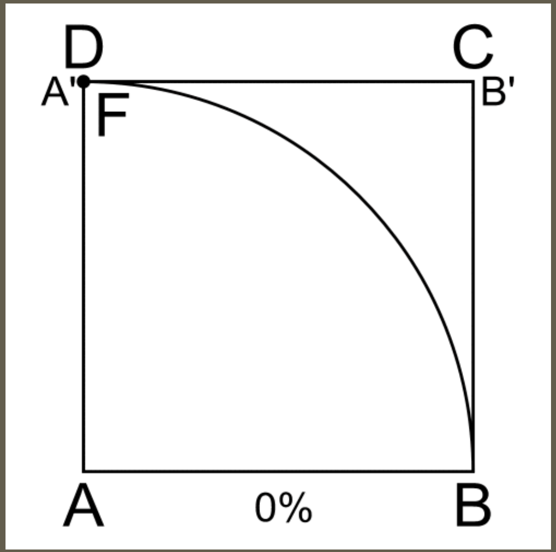
1. KVADRATRIX

- Másnéven triszektrix vagy Hippiász-görbe
- **Hippiász** (Kr. e. 420 körül), görög filozófus és matematikus találta fel
- Egyenletesen mozgó alakzatok metszéspontjaként származtatható
- Egy szög tetszőleges számú, egyenlő arányú felosztására is alkalmazható



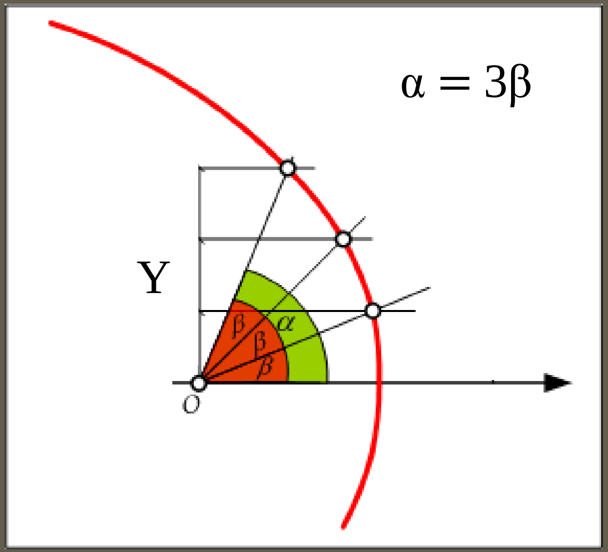
SZÖGHARMADOLÁS KVADRATRIXSZAL

SZERKESZTÉS



A'B' szakasz csúsztatása AB-be
AD szakasz forgatása AB-be

ALKALMAZÁS

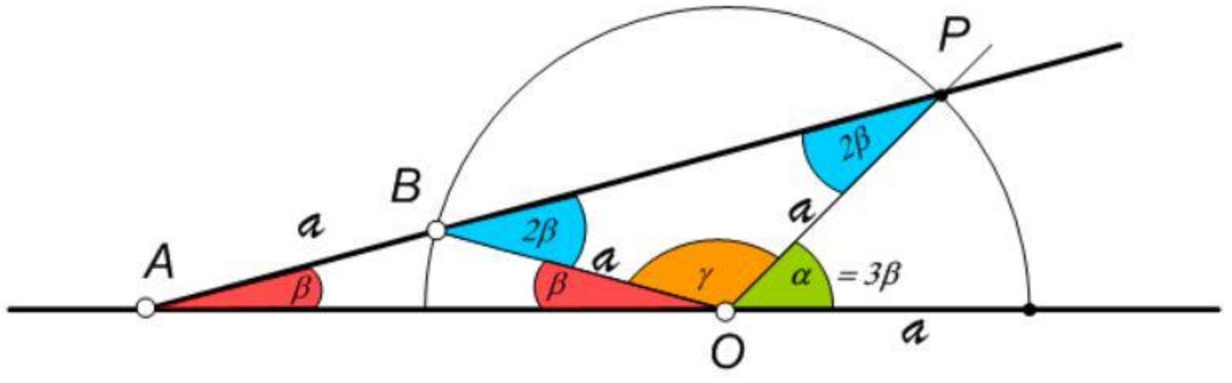


Y felosztása 3 egyenlő részre

2. NEUSZISZ-SZERKESZTÉS

- **Arkhimédész** (Kr. e. 250 körül), szicíliai matematikus és természettudós alkalmazta
- <u>Speciális vonalzó</u>: tetszőleges hosszúságú szakasz be van jelölve rajta (***N-vonalzó*** *vagy* ***betoló vonalzó***)

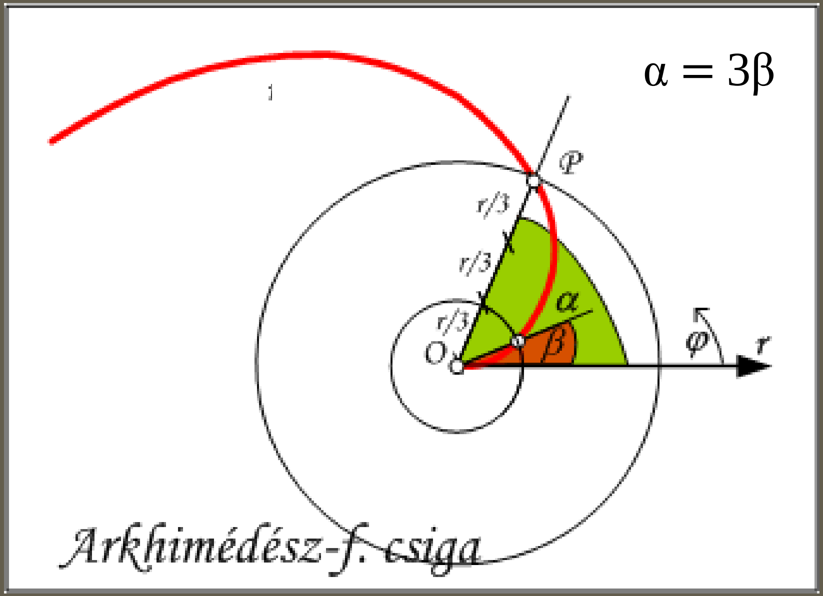
$$\gamma = \pi - 4\beta = \pi - \beta - \alpha \Rightarrow \alpha = 3\beta$$



9. Az A-nál kapott OAB∠ = β szög az α szög harmada

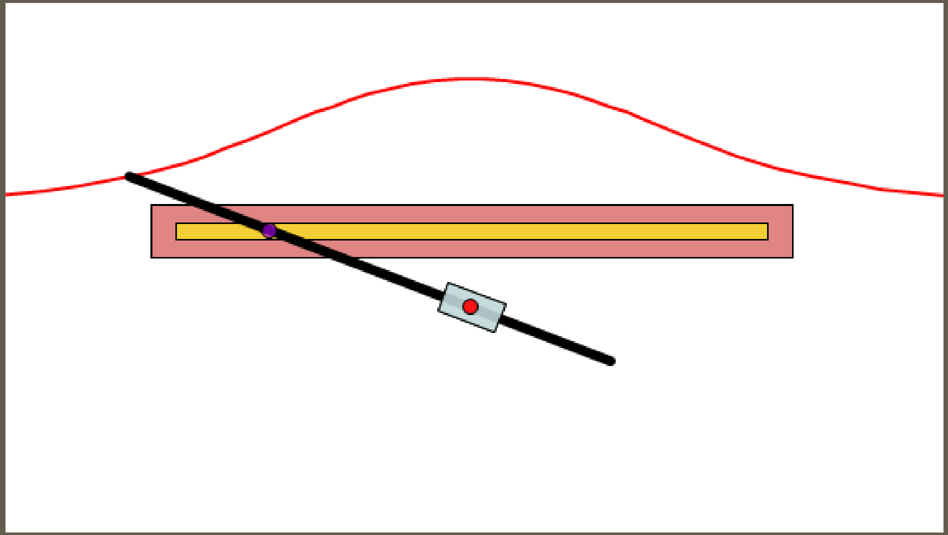
3. ARKHIMÉDÉSZ-FÉLE SPIRÁL

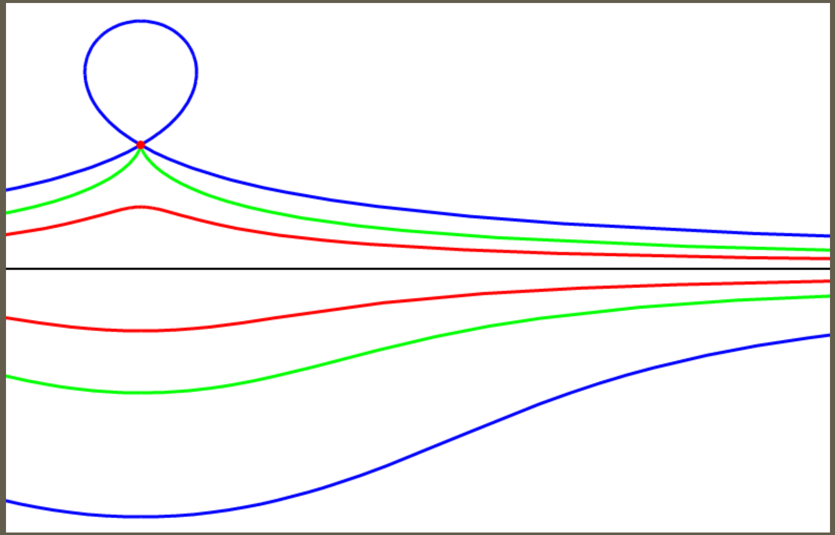
- Ugyanúgy használható egy szög tetszőleges számú és tetszőleges arányú felosztására, mint a kvadratrix
- Forgó félegyenes és rajta az O középponttól távolodó pont egyenletes mozgása rajzolja ki
- Itt az OP rádiuszt kell arányosan osztani



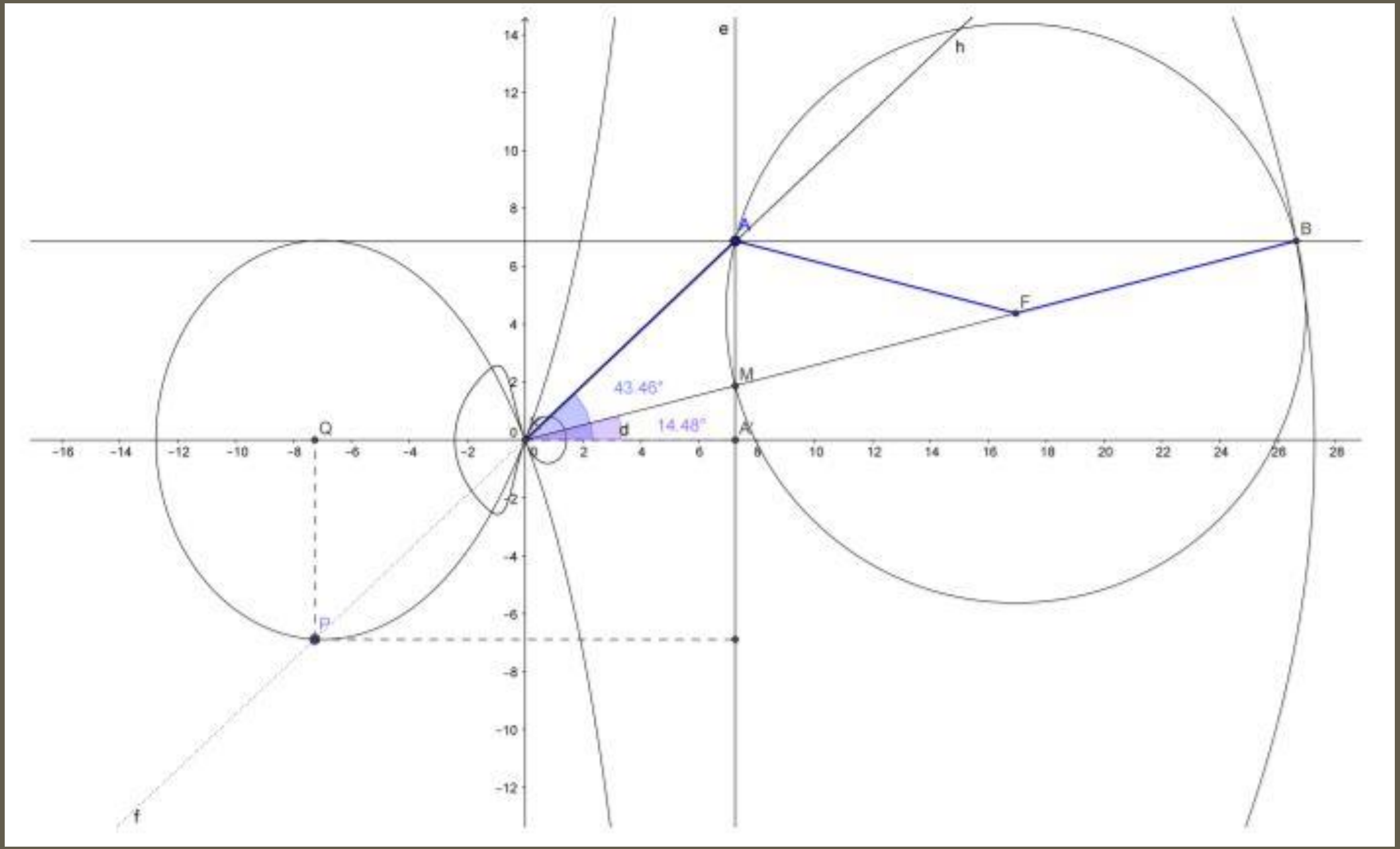
4. KONHOISZ

- **Nikomédész** (Kr. e. 240 körül), alexandriai matematikus találta fel
- **Konhoisz körző**: megrajzolható vele az egyenes konhoisza → neuszisz-szerkesztés egyszerűsítése
  - Ezt is használta a szögharmadoláshoz



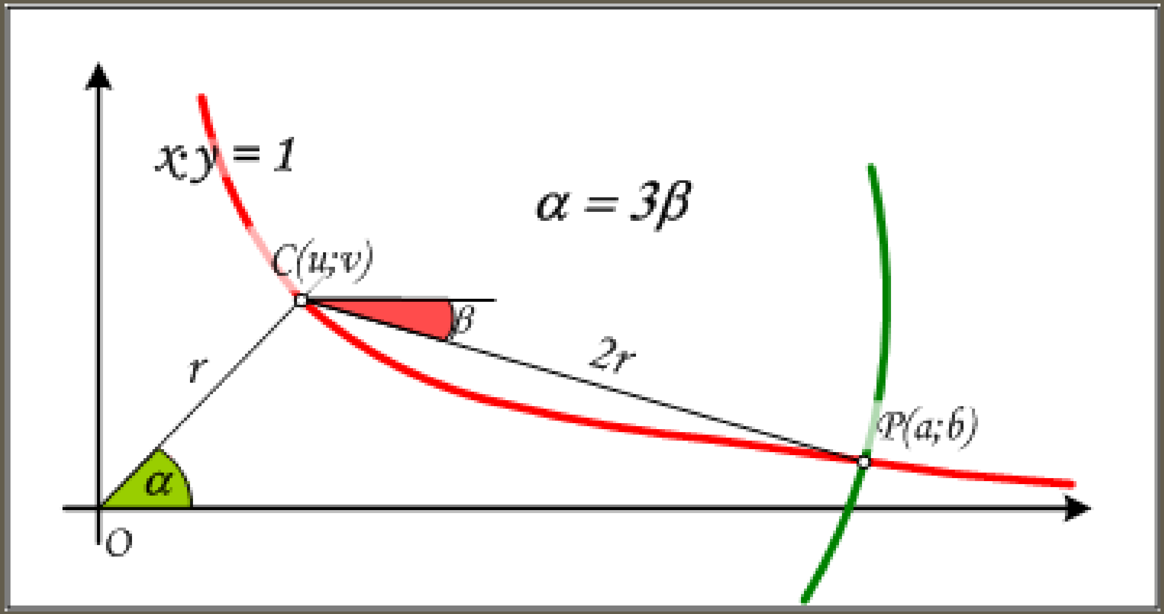


SZÖGHARMADOLÁS KONHOISSZAL



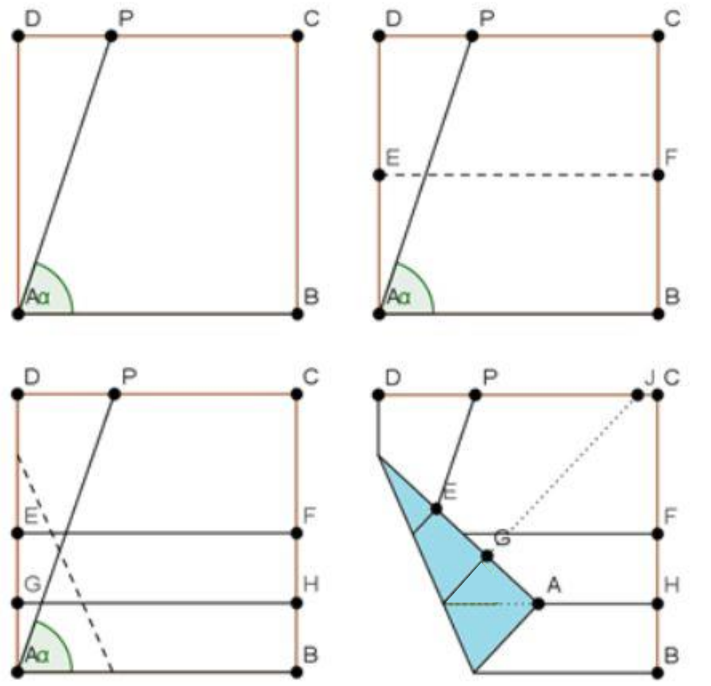
5. RECIPROKFÜGGVÉNYES MEGOLDÁS

- **Bolyai János** (1802 – 1860), magyar matematikus és hadmérnök nevéhez fűződik
- Tetszőleges hegyesszög (α) harmadolása **hiperbola** ($f(x) = \frac{1}{x}$) segítségével



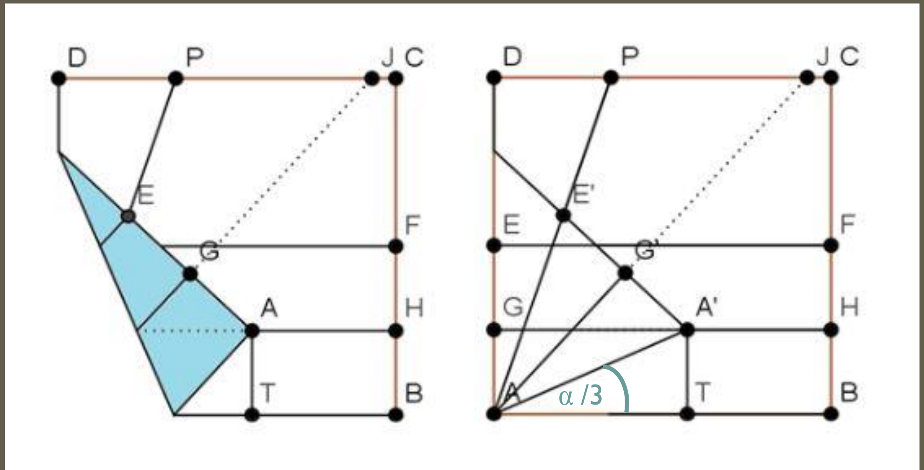
EGY KIS ÉRDEKESSÉG…

SZÖGHARMADOLÁS ORIGAMIVAL



$40° < \alpha < 90°$

BIZONYÍTÁS



E'G' = G'A' = A'T

E'A' ⊥ AG'

↓

AG'E' ≡ AG'A' ≡ ATA', tehát AG' és AA' valóban három egyenlő részre osztják az α szöget.

FORRÁSOK

- https://hu.wikipedia.org/wiki/Sz%C3%B6gharmadol%C3%A1s
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Kvadratrix
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Neuszisz_szerkeszt%C3%A9s
- https://hu.wikipedia.org/wiki/Konhoisz
- https://en.wikipedia.org/wiki/Conchoid_(mathematics)
- https://matekarcok.hu/szogharmadolas/
- http://www.erdekessegek.hu/index2_11.htm
- http://szerver2.hog.sulinet.hu/sites/default/files/sz%C3%B6gharmadol%C3%A1s.pdf
- https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0038_matematika_Balka_Richard_Egri-Nagy_Attila_Juhasz_Tibor-Matematikatortenet_problemakon_keresztul/ch05s02.html#id513105
- https://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop425/0038_matematika_Balka_Richard_Egri-Nagy_Attila_Juhasz_Tibor-Matematikatortenet_problemakon_keresztul/ch05s04.html
- https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2010/maczko_renata.pdf

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!