Operációkutatás története

Készítette:

Szabó Gergely

JVJ6L4

Operációkutatás

- Az **operációkutatás** az alkalmazott matematikának az az ága, ami bizonyos folyamatok és eljárások optimalizálásával foglalkozik.

Feladat

- Egy vetőmagokat forgalmazó vállalat háromféle egynyári sziklakerti vetőmagkeveréket csomagol és értékesít. Ezeket **„Sárga varázs"**, **„Piros varázs"** és **„Kék varázs"** néven hozza forgalomba. A keverékhez ötfajta virágmagot használnak: **kaliforniai mák**ot, **piros len**t, **borzaskatá**t, **tatárvirág**ot és **búzavirág**ot. Az egyes keverékek az alábbi táblázatban látható számoknak megfelelő százalékos arányban tartalmazzák a virágmag fajtákat:

	Virágmagok				
Keverékek	kaliforniai mák	piros len	borzaskata	tatárvirág	búzavirág
Sárga varázs	30	15	15	25	15
Piros varázs	20	35	5	30	10
Kék varázs	20	10	25	20	25

- A vállalatnak az egyes keverékeken grammonként **20**, **27** és **30 Ft** haszna van. Az egyes virágmagfajtákból egy évben rendelkezésre álló mennyiségek a következők: **100 kg** kaliforniai mák, **120 kg** piros len, **90 kg** borzaskata, **100 kg** tatárvirág, **80 kg** búzavirág. A forgalomba hozott termékek minden évben jól értékesíthetők (mind elkelnek).

- Mennyit gyártson a vállalat az egyes termékekből, hogy a haszna maximális legyen? Írja fel a feladat modelljét!

s: termelendő sárga varázs termék mennyisége

p: termelendő piros varázs termék mennyisége

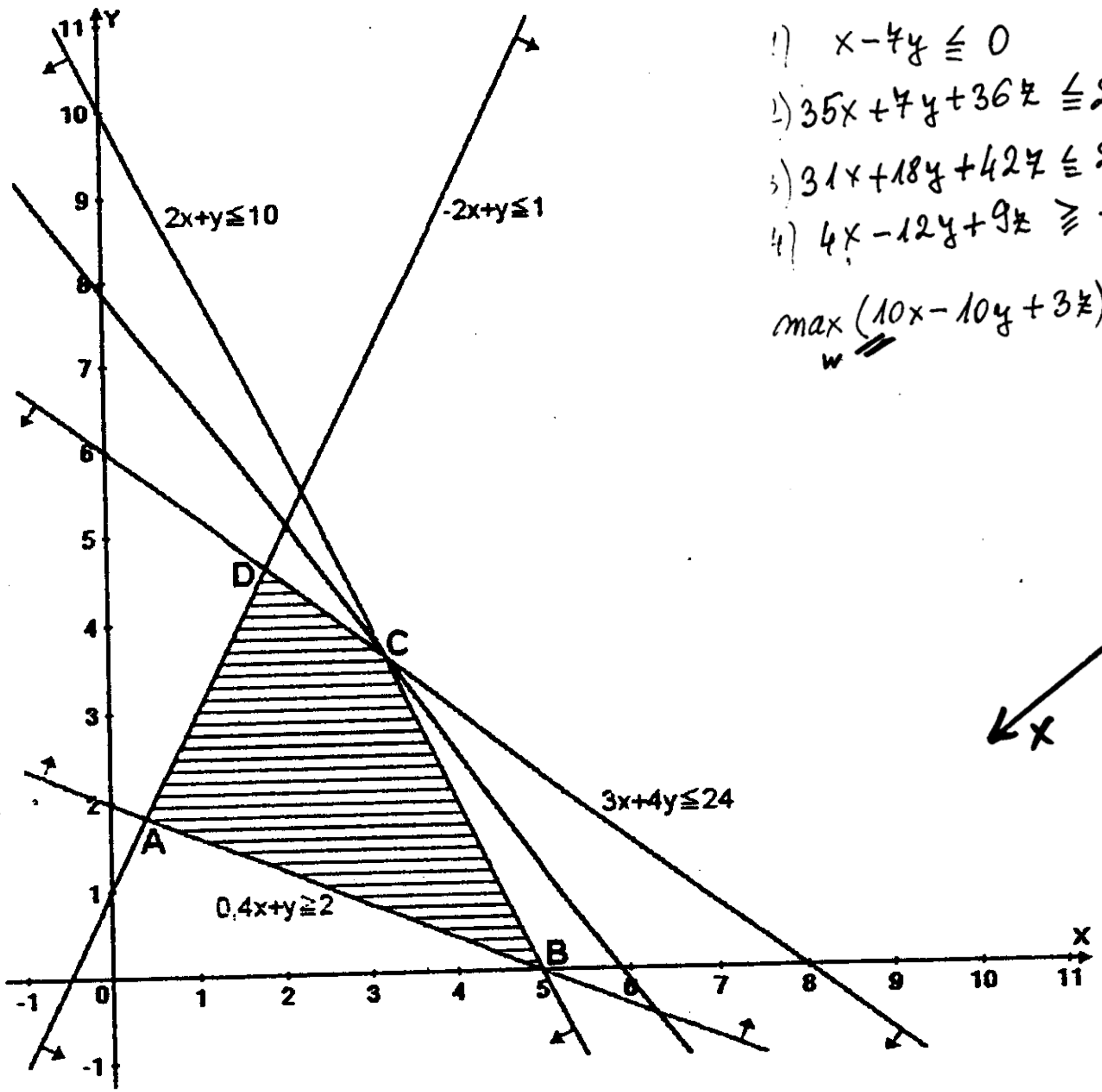
k: termelendő kék varázs termék mennyisége

$0 \leq s,p,k$

$20*s + 27*p + 30*k \rightarrow$ maximalizálni kell (profit)

Készlet korlátok:

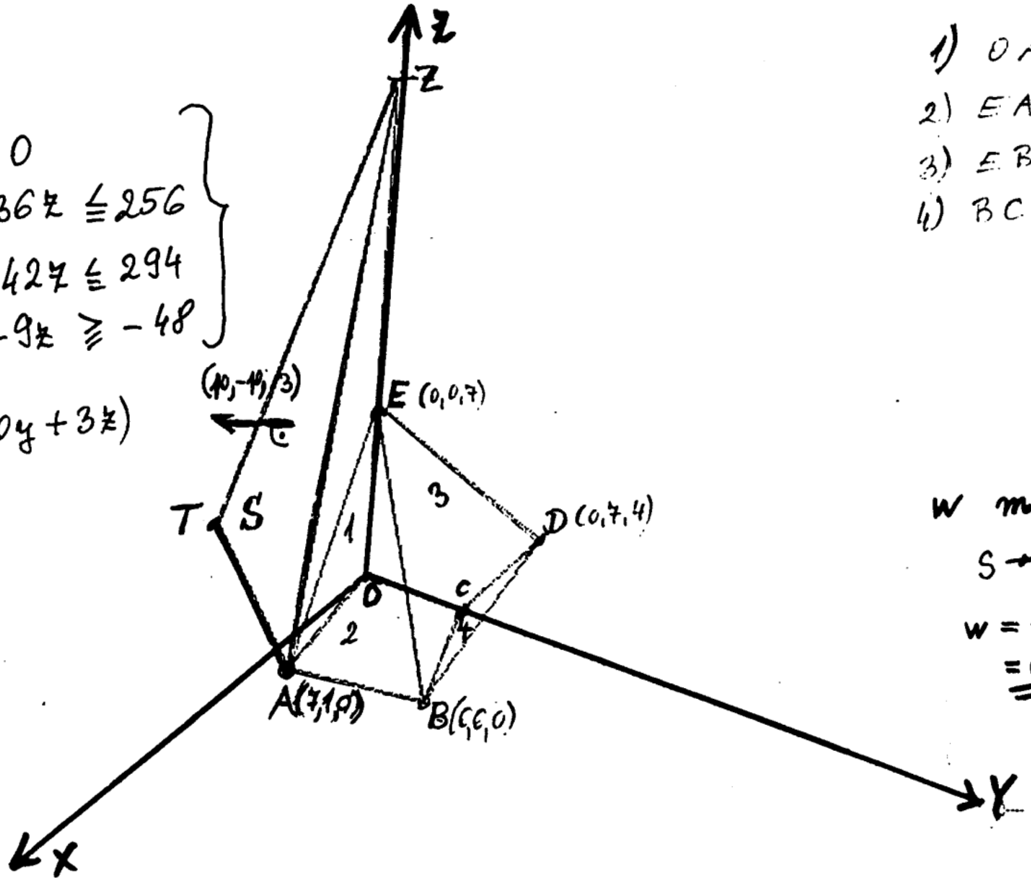
- Kalifroniai mákból: $s*30\%+p*20\%+k*20\% \leq 100$
- Piros lenből: $s*15\%+p*35\%+k*10\% \leq 120$
- Borzaskata: $s*15\%+p*5\%+k*25\% \leq 90$
- Tatárvirág: $s*25\%+p*30\%+k*20\% \leq 100$
- Búzavirág: $s*15\%+p*10\%+k*25\% \leq 80$
- Alsó és felső korlátok és lineáris kifejezés maximalizálása



$0 \leqq z, x, y$

1) $x - 7y \leqq 0$
2) $35x + 7y + 36z \leqq 256$
3) $31x + 18y + 42z \leqq 294$
4) $4x - 12y + 9z \geqq -48$

$\max (10x - 10y + 3z) = w$



1) OAE
2) EAB
3) EBD
4) BCD

w max ha

$S \to A(7,1,0)$

$w = 10\cdot 7 - 10\cdot 1 + 3\cdot 0$

$= \underline{\underline{60}}$

Általános probléma

minimalizálni/maximalizálni $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

korlátozások
$$
\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leqslant & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leqslant & b_2 \\
. & & . \\
. & & . \\
. & & . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leqslant & b_m
\end{array}
$$

és $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0,$

minimalizálni $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

korlátozások
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdot \qquad\qquad &\quad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad &\quad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad &\quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

és $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0,$

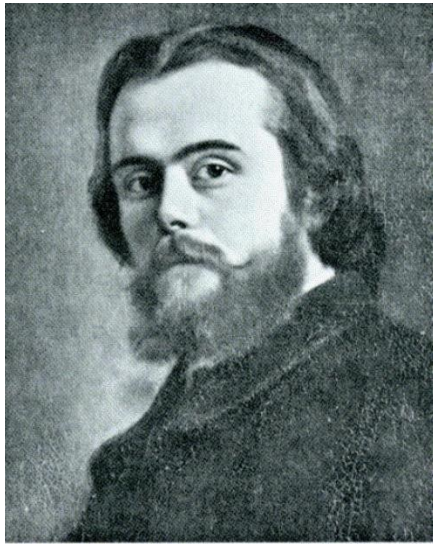
minimalizálni $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$

korlátozások $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ and $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}.$

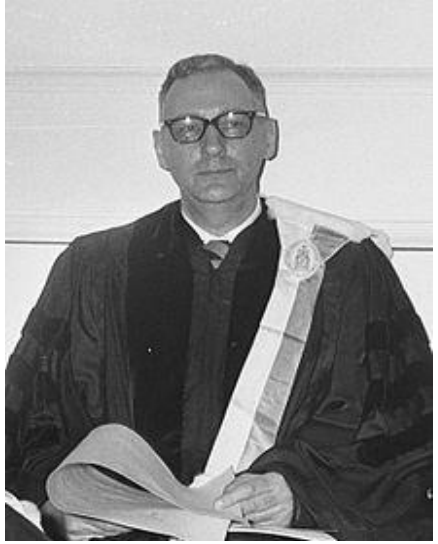
Története

- Korai civilizációk: élelmiszerelosztás, haditáp
- Bosovič 1757, királyi csillagász
  - hibaszámítás

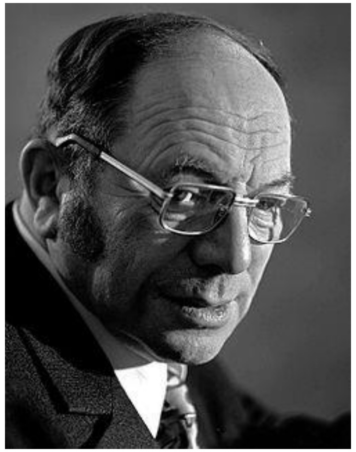
Joseph Fourier
1768-1830



Marie Esprit Léon Walras
1834-1910

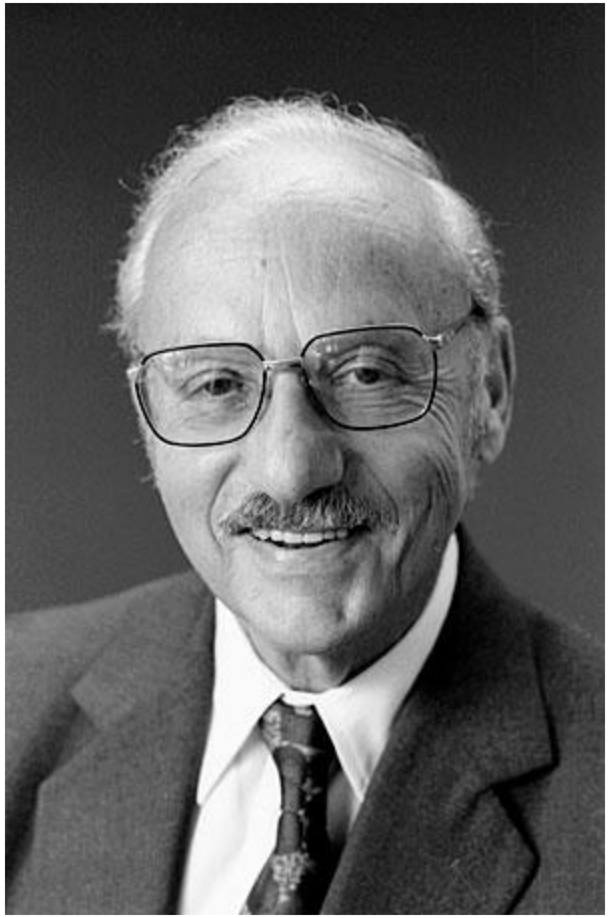


Tjalling C. Koopmans
1910-1985



Leonyid Vitaljevics Kantorovics
1912-1986

- 1936 A brit hadseregben először használják az „operation research” kifejezést
- 1939 „Mathematical Methods of Organization and Planning Production” (Kantorovics)
- 1941 Szállítási feladat (Hitchcock)
- 1944 „Theory of Games and Economic Behavior” (Neumann és Morgenstern)



George Bernard Dantzig
1914-2005

- 1947
  - Szimplex módszer
  - Megoldó algoritmus kidolgozása
  - Többdimenziós poliéder felületén mozgunk

  - Grafikus megoldás
    - Vonalzóval, síkkal
  - Általános algebrai megoldás
    - Elemi bázistranszformácóival

- 1951 Első számítógépes szimplex algoritmus
- 1951 Nemlineáris programozás optimalitási feltételei (Kuhn és Tucker)
- 1955 Magyar módszer
- 1957 Dinamikus programozás (Bellman)
- 1958 Egészértékű programozás (Gomory)
- 1959 Legrövidebb út probléma (Dijkstra)

Futás gyorsasága

- Gyakorlatban a közgazdasági és egyéb példáknál gyorsan lefut
- Matematikai problémáknál lehet, hogy bizonyítottan exponenciálisan lassú
- Általános esetben exponenciálisan lassú

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j & \\ \text{subject to} & \displaystyle 2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1} & i = 1, \ldots, n \\ & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Ellipszoid módszer

- 1979 Leonid Genrikhovich Khachiyan
- Lineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldására
- Polinomiális időben megoldja a problémát

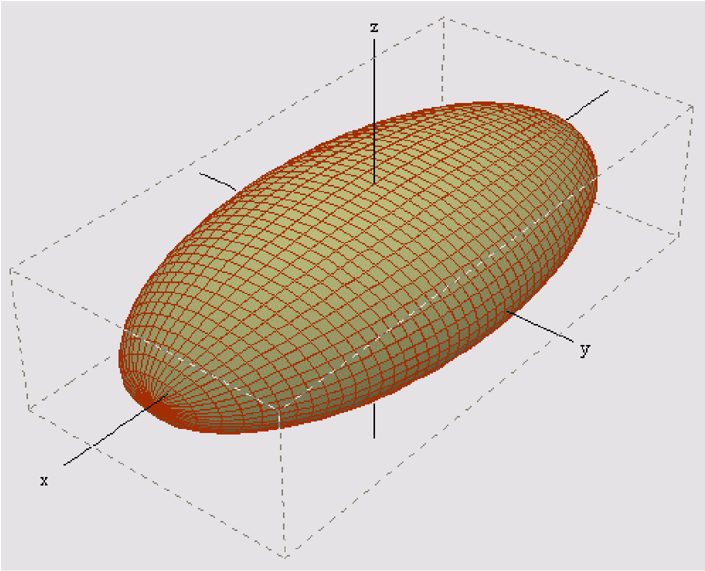
1952-2005

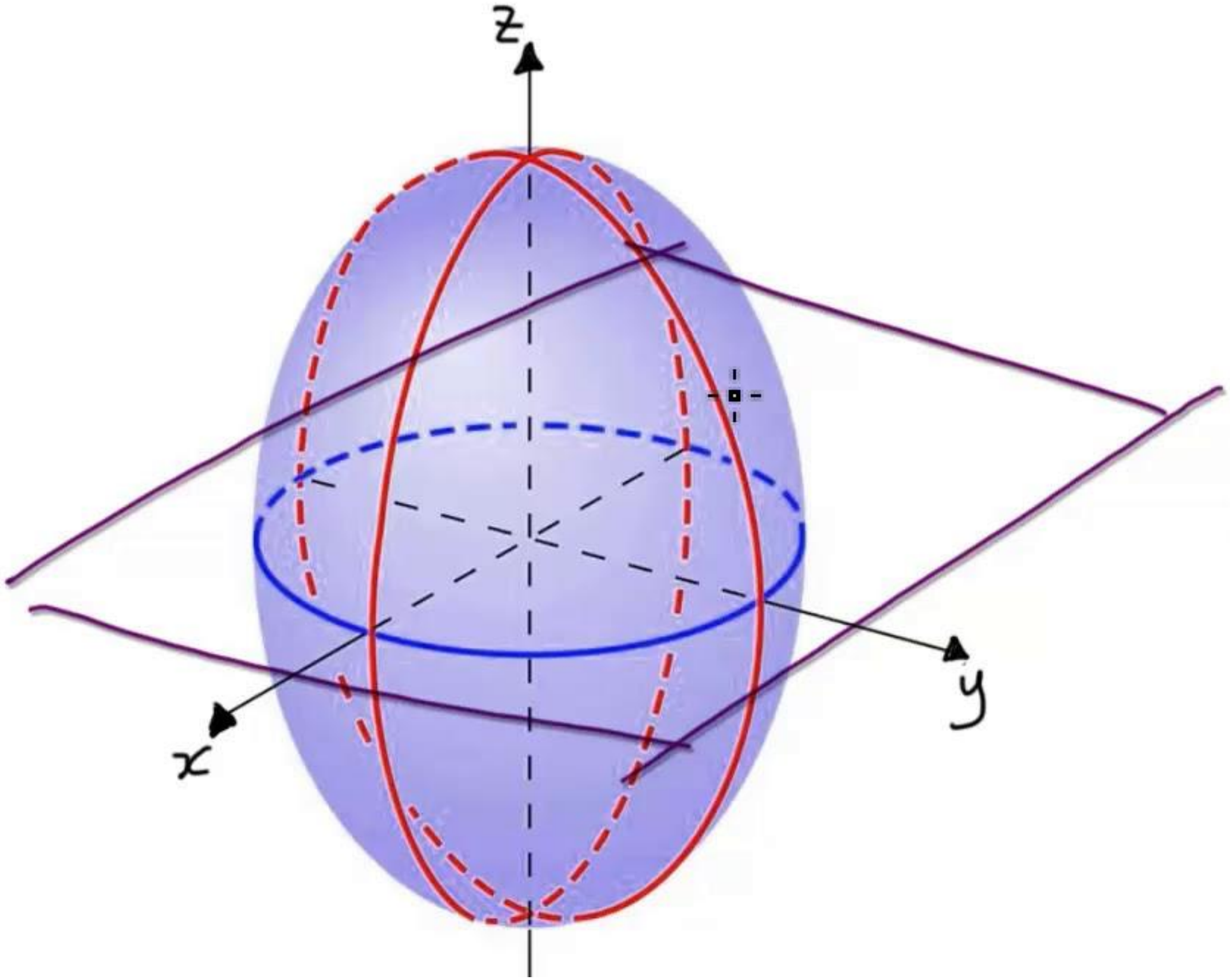
Ellipszoid

- Olyan másodrendű felület, amelynek egyenlete alkalmasan orientált derékszögű koordináta-rendszerben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- ahol a, b és c pozitív valós számok, amelyek meghatározzák az ellipszoid alakját




z
y
x

Rekurziós képletek

$$\frac{\underline{a}_i^* \underline{x}_k - b_i}{\sqrt{\underline{a}_i^* \underline{P}_k \underline{a}_i}}$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - \frac{h_k}{\sqrt{\underline{a}^* \underline{P}_k \underline{a}}} \underline{P}_k \underline{a}$$

$$d_k = \frac{\underline{a}^* \underline{x}_k - b}{\sqrt{\underline{a}^* \underline{P}_k \underline{a}}}$$

$$h_k = \frac{n d_k + 1}{n + 1}$$

$$\underline{P}_{k+1} = \frac{1}{w_k^2} \left[\underline{P}_k - \frac{2h_k}{1 + d_k} \frac{1}{\underline{a} \underline{P}_k \underline{a}} (\underline{P}_k \underline{a}) (\underline{P}_k \underline{a}) \right]$$

Értékelése

- Nagy jelentőségű
- Bizonyítottan polinomiális algoritmus
- Az elemi műveletek száma a feladat paramétereinek felírásához szükséges bináris kódok számának polinomiális függvénye
- Hatékonysága nem közelíti meg a szimplex módszer hatékonyságát

Köszönöm a figyelmet!