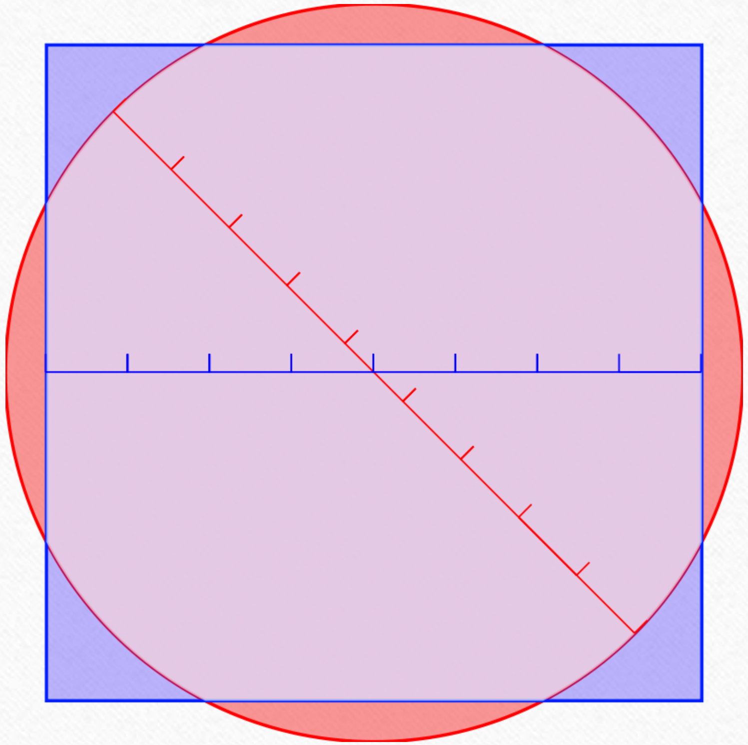
Kör négyszögesítése

Probléma definíció

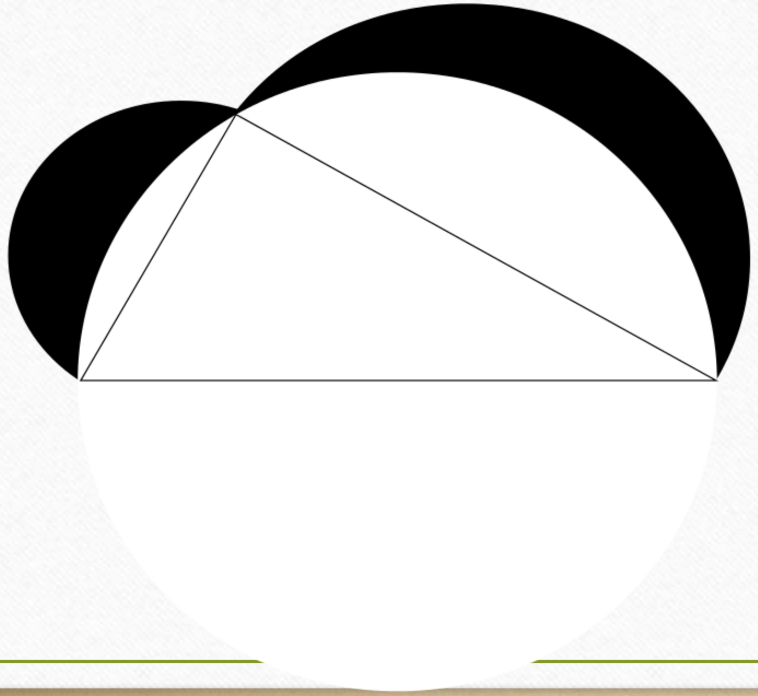
A kör négyszögesítése (kvadratúrája) az a szerkesztési feladat, melynek lényege adott kör területével egyenlő területű négyzet szerkesztése. Modern terminológiával ez a feladat úgy is megfogalmazható, miszerint (csak mértani eszközök felhasználásával) szerkesztendő egy $\sqrt{\pi}$ oldalhosszúságú négyzet (az egységszakasz mint szerkesztési adat ismeretében).

Rhind-papirusz

A Rhind-papiruszban (i. e. 2000 k.) közölt legkorábbi megoldás csupán próbálkozás eredménye. (A kör átmérője = 9, a négyzet oldala = 8).



Hippokratész holdacskái



A holdacskák területösszege megegyezik a háromszög területösszegével, ez sokáig megtévesztette a geométereket.

Rektifikáció (Kiegyenesítés)

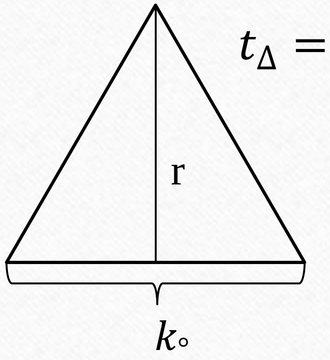
A probléma rokon, de nem azonos a π hosszúságú szakasz megszerkesztésével (rektifikációs v. körkiegyenesítési feladat). Az antik kultúrák értelmezése szerint egy síkidom területének mértéke azt fejezi ki, hogy az idom hányszorosa az egység oldalú négyzetnek. A görögök az idom területével megegyező négyzettel, az oldalának hosszával jellemezték a méretet. Ezért az ilyen területszerkesztési feladatokat a négyszögesítés (pontosabban négyzetesítés), latinul a kvadratúrája névvel illetjük.

A kvadratúra és a rektifikáció kapcsolata

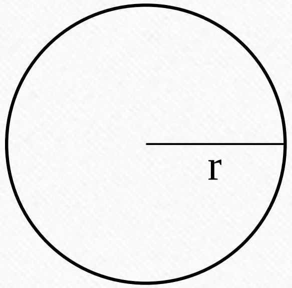
Könnyen belátható, hogy a körrektifikációs és a körkvadratúra-szerkesztések ekvivalensek a következő értelemben: ha az egyik megoldható **euklideszi szerkesztéssel**, akkor a másik is, és fordítva: ugyanis egy számból annak gyöke, vagy négyzete egyszerűen megszerkeszthető részben a párhuzamos szelők tétele, részben a magasságtétel segítségével. Ezért az egyik feladat megoldása igen könnyen maga után vonná a másik megoldását is.

Arkimédesz (i. e. 250 k)

$$t_\Delta = t_\circ$$



$t_\Delta = kr/2$



$k_\circ = 2r\pi$

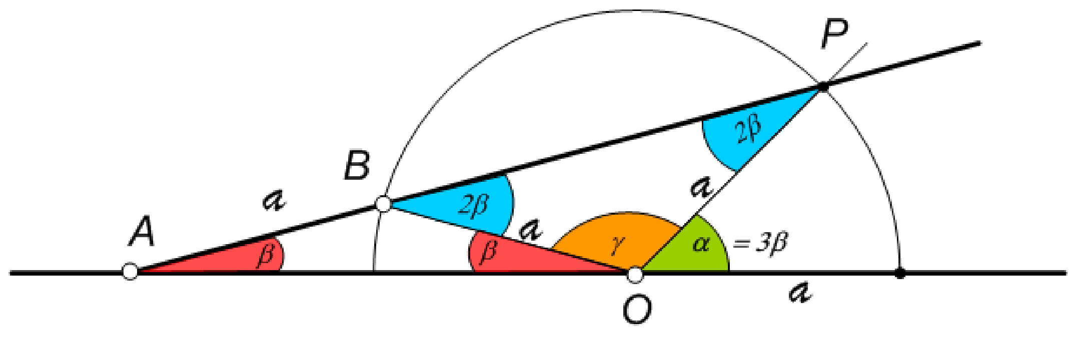
$t_\circ = r^2\pi$

Neuszisz szerkesztés

A geometriában a neuszisz szerkesztés feladata: egy adott hosszúságú szakaszt két vonal közé beilleszteni úgy, hogy a szakasz egyenese egy adott ponton menjen át.

A szerkesztést az ókori görög geométerek gyakran használták, elsősorban olyan feladatok megoldására, amiket a **körző és a vonalzó kizárólagos használatával (euklideszi szerkesztés) nem tudtak megoldani**. A szerkesztés alkalmazásáról az antik tudományos irodalomban számtalan említés történik. Az alexandriai **Nikomédész (i.e. 240 k.)** speciális eszközt – **konhoisz körzőt**

$$\gamma = \pi - 4\beta = \pi - \beta - \alpha \Rightarrow \alpha = 3\beta$$



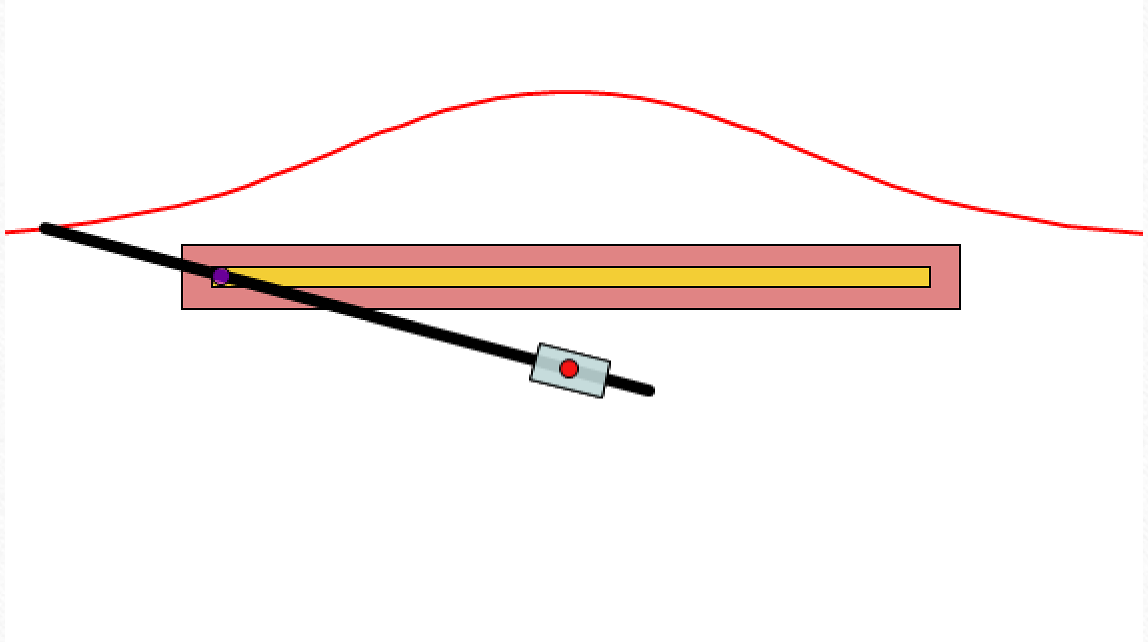
9. Az A-nál kapott OAB∠ = β szög az α szög harmada

Konhoisz körző

A konhoisz (konhois, konhoid, kolhois) egy olyan síkgörbe, amelyet egy másik, polárkoordinátákban adott görbéből származtatunk: a görbe rádiuszvektorát egy fix szakasszal megnyújtjuk, vagy zsugorítjuk.

Ha a görbe egyenlete $r = r_g(\varphi)$, és a fix szakasz **a,** akkor a konhiosz egyik ágának egyenlete $r_k = r_g(\varphi) - a$. Szokták a két ág egyenletét összevonva

$r_k = r_g(\varphi) \pm a$ alakban is megadni. Ha a rádiuszvektor **a**-nál kisebb, akkor a görbe pontjától **a**-val visszamérve a konhiosz-pontot az origón túl kapjuk meg.



Adam Adamandy Kochański (1631-1700) lengyel matematikus

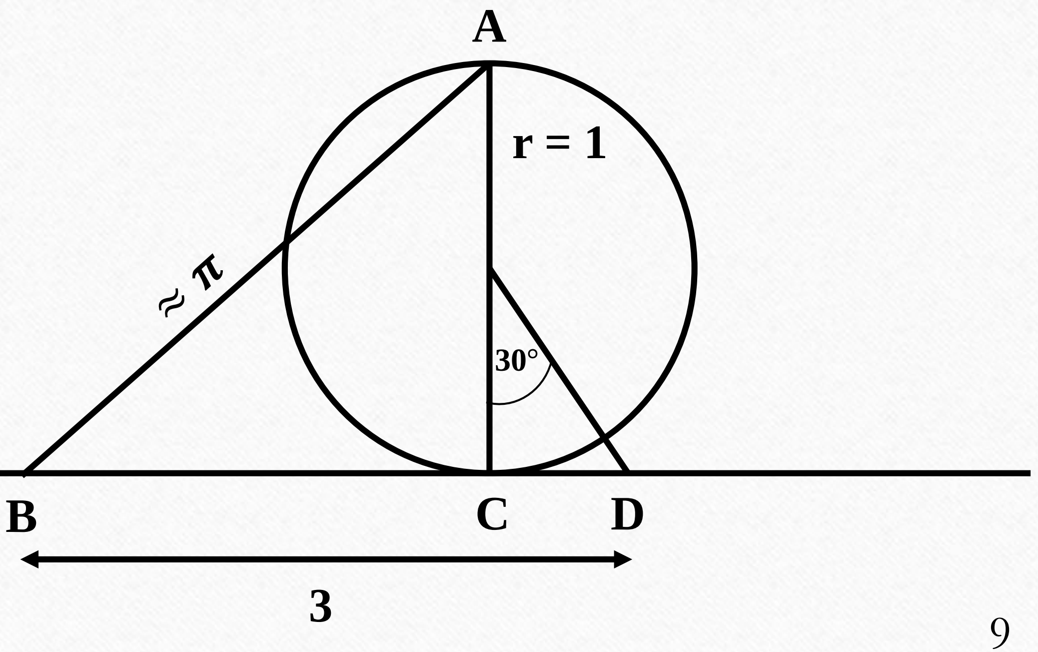
Kochanski-féle szerkesztés (1685)

NEM euklideszi szerkesztés

$$\mathbf{AC = 2}$$

$$\mathbf{BC = 3 - \tan 30° = 3 - 1/\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{AB = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \approx 3{,}14153\ldots}$$



Megjegyzés: Ezt a módszert még a mérnökök kb. 50 éve is használták szerkesztéseknél.

A körnégyszögesítési feladat megoldhatósága

A feladat euklideszi szerkesztéssel nem oldható meg.

Ezt az ókorban is sejtették.

Megjegyzés:

Körzővel és vonalzóval (maximum) a 4 alapművelet és a négyzetgyökvonás szerkeszthető meg.

Egy számot transzcendensnek (értelmen túli) nevezünk, ha nem gyöke semmilyen racionális együtthatójú (polinomiális) egyenletnek.

Az 1800-as évek elején már ismert volt, hogy amennyiben a π szám transzcendens, akkor a kör négyszögesítése euklideszi szerkesztéssel lehetetlen.

1882-ben bizonyította be **Ferdinand von Lindemann** (1852-1939) német matematikus, hogy a **π szám transzcendens.**

A π szám geometriai meghatározásának nagy alakjai

Srinivasa Ramanujan (1913)

Carl Olds (1963)

Martin Gardner (1966)

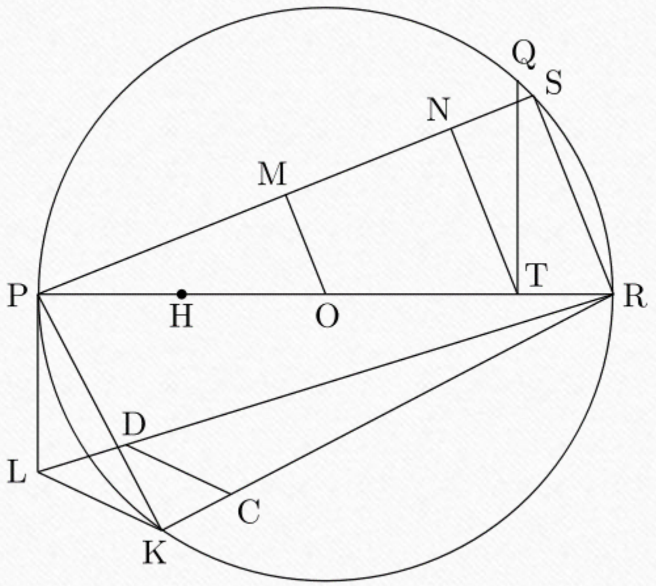
Benjamin Bold (1982)

Mindannyian geometriai meghatározásokat adtak a $\frac{355}{113} \sim \pi$ értékére 6 tizedes jegy pontossággal.

Srínivásza Rámánudzsan (1887-1920) indiai matematikus

1914-ben talált módszere, a π, 8 tizedes jegyig pontos közelítésére:
NEM euklideszi szerkesztés

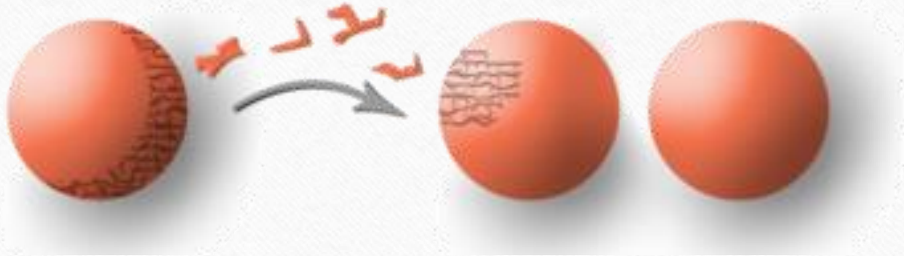
$$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$$
$= 3{,}14159265258264612 53\ldots$



Megjegyzés:
Pontosabb, de bonyolultabb, ezért nem használták

Banach–Tarski-paradoxon

Alfred Tarski **1925-ben** vetette fel a következő problémát: a síkban átdarabolható-e egymásba egy egységterületű körlemez és egy ugyanakkora területű négyzetlap. Itt az átdarabolás halmazelméleti módon értendő, tehát mindkét alakzatot véges sok részre (részhalmazra) kell bontani, úgy, hogy a részek száma ugyanannyi, sőt egymásnak kölcsönösen megfeleltethetők oly módon, hogy az egymásnak megfeleltetett részek egybevágóak. A feltétel, hogy a két alakzat területe legyen azonos, szükségszerű: ha két területtel rendelkező alakzat egymásba átdarabolható, akkor területük megegyezik.



Laczkovich Miklós

1948. február 21.-én született Budapesten

1966-ban érettségizett a budapesti Fazekas Mihály Gimnáziumban

1971-ben szerzett matematikusi diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen

1982-ben kapta meg egyetemi docensi, 1993-ban egyetemi tanári kinevezését

1993-ban a Magyar Tudományos Akadémia levelező, 1998-ban pedig rendes tagjává választották

Laczkovich-tétel (1989)

Évtizedek alatt csak gyenge negatív részeredmények születtek: kiderült például, hogy nem lehet olyan részekkel végrehajtani a szétdarabolást, amelyeknek Jordan-görbékből álló határuk van. Nagy meglepetésre azonban **1989-ben** Laczkovich Miklós bebizonyította, hogy ilyen átdarabolás létezik, sőt a szükséges egybevágóságok között csak eltolások szerepelnek. A bizonyítás, amely a kiválasztási axiómát veszi alapul, számos Laczkovich által kidolgozott fogalmon kívül használ egy Erdős és Turán által bizonyított diszkrepanciatételt is.

Köszönöm a figyelmet!