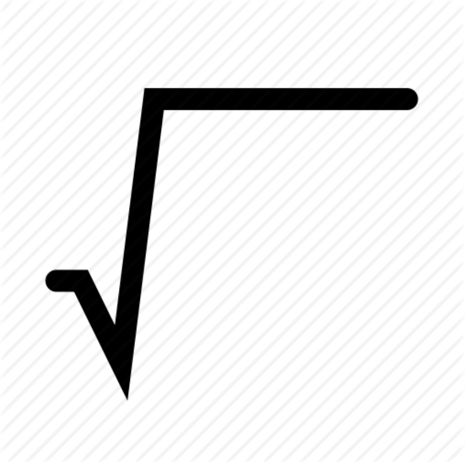
Gyökvonás története és módszerei

Kertész Krisztián (GDJK9Q)

Gyökszámítás Története

A gyökjel eredete

- A gyökjel eredete elég bizonytalan
- Legtöbben, beleértve Leonhard Eulert is, úgy gondolják, hogy a latin "**radix**" (gyökér) szó **kezdőbetűjének az elnyújtásából** származik.
- Ez a jel először nyomtatásban a felső vízszintes vonal nélkül jelent meg 1525-ben, Christoph Rudolff német matematikus által írt "Die Coss"-ban.



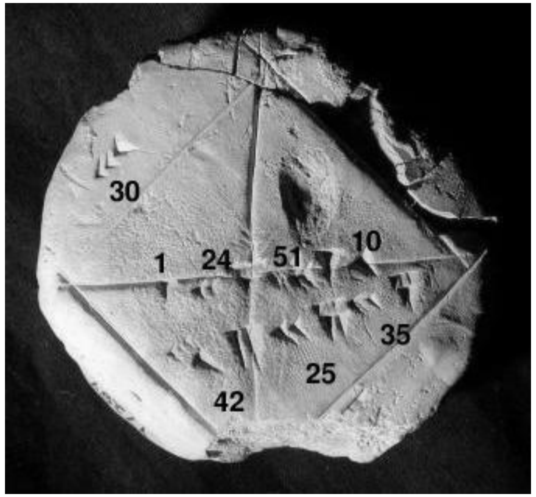
Mezopotámia (Babilóniai matematika)

- 60-as számrendszer
- Sok írásos emlék (400 agyagtábla, ékírás)
- Az **i.e.1800 - i.e.1600** időszakból származó táblákon a $\sqrt{2}$-t már 5 tizedes pontossággal meg tudták határozni

Babilóniai agyagtábla:
Az átlón lévő felirat 2 négyzetgyökét ábrázolja négy, 60-as számrendszerű számjeggyel.

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}\sim 1{,}4142129$$

$$\sqrt{2}\sim 1{,}4142135$$



Ókori Indiai és Görög matematika

- **Sulba sutra-k** (i.e.800 – i.e.200)
  - Irracionális számok, prímek, köbgyök
  - Első – és másodfokú egyenletek megoldása
  - Pithagorasz tétel bizonyítása
- **Dzsaina matematikusok** (i.e.400 – i.e.200)
  - Halmazelmélet, Logaritmus
  - Négyzetre emelés, négyzetgyökvonás fogalma
- **Euklidesz** (i.e.300)
  - „Elemek” című könyv
  - 2 négyzetgyöke irracionális
  - Prímek száma végtelen

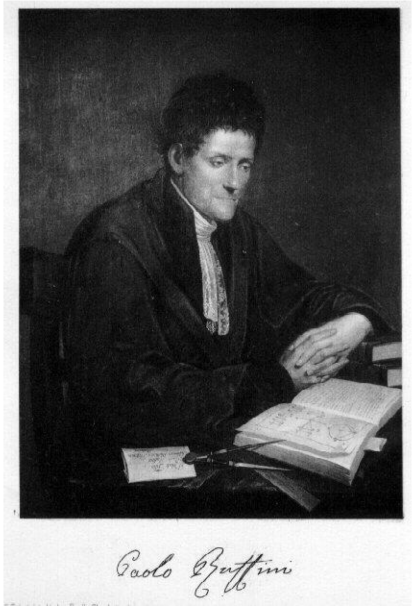
Klasszikus Indiai és Muszlim matematika

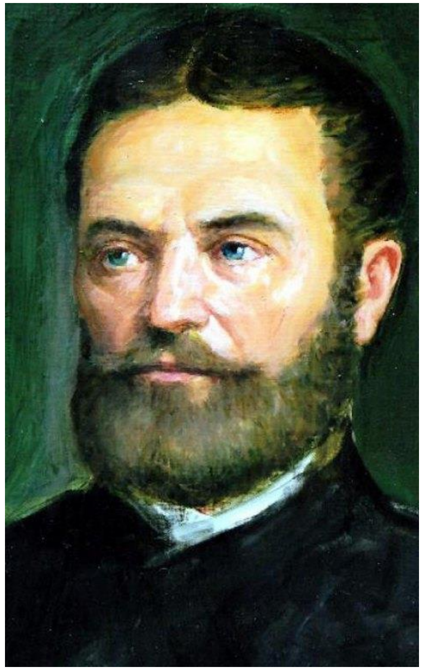
- **Árjabhatija** (499)
  - Sinus táblázatok (=Arkhimedesz húrtáblázatai)
  - Négyzet – és Köbgyökszámítás, szorzatösszegek
  - A 10-es helyiértékes rendszer használatát erősíti
- **Brahmagupta** (7.sz.)
- **Gijász ad-Din Dzsamsíd al-Kási** (15.sz.)
  - n-edik gyök kiszámolása (speciális eset)

$$A = \sqrt{\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\left(\frac{p}{2}-d\right)}$$

18.-19. század

- **Euler** bevezette a képzeletbeli számokat (imaginary) i = $\sqrt{-1}$
- **Paolo Ruffini** és **Niels Henrik Abel** bizonyítása a gyökképletekre
- **Bolyai János** kijavította Abel hibás bizonyítását

Módszer I.

Egy szám négyzetgyökének hozzávetőleges értékének számítás számológép nélkül!

Nézzük 89 négyzetgyökét!

$$\sqrt{89} \qquad\qquad \sqrt{81} = 9$$

A hozzá legközelebb álló, kisebb négyzetszám a 81, aminek négyzetgyöke 9.

A két szám különbsége 89 – 81 = 8

$$\sqrt{89} \qquad \sqrt{81} = 9$$

$$\frac{8}{18} = 0{,}44$$

$*2$

Ezt osszuk el a gyök első számjegyének (9) kétszeresével (azaz 9*2 = 18-cal)!

A négyzetgyök hozzávetőleges értéke:

$$\sqrt{89} \qquad \sqrt{81} = \boxed{9}$$

$$\frac{8}{18} = \boxed{0{,}44}$$

$$\sqrt{89} = 9{,}44$$

A tényleges értéke 3 értékes jegyre **9,43**.

Módszer II.

Egy négyzetszám négyzetgyökének számítás számológép nélkül!

(Csak korlátozottan alkalmazható: 10000 és annál kisebb négyzetszámok esetén)

Tekintsünk egy háromjegyű négyzetszámot!

$$\sqrt{841}$$

Az egyjegyű számokból és négyzeteikből indulunk ki!

(A színes utolsó jegyeknek fontos szerepük lesz!)

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81

Melyik négyzetszám utolsó számjegye egyezik az általunk választott szám utolsó jegyével?

$$\sqrt{841}$$

1/9

Írjuk le a számokat, amiknek a négyzetében megtaláltuk az utolsó számjegyet!

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81

Melyik a **legnagyobb négyzetszám**, amelyiknél nagyobb, vagy amelyikkel egyenlő az általunk választott szám első számjegye?

2 $\sqrt{841}$ 1/9

Írjuk fel azt a számot, amelyiknek ez a négyzete!

Ez lesz a négyzetgyök első számjegye!

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81

Szorozzuk meg ezt a számot a nála eggyel nagyobb számmal!

$$\sqrt{841}$$

2

1/9

2 * (2+1) = 6

8 > 6

1 < 9

A gyök: 29

Ha a szorzatnál ***nagyobb*** az általunk választott szám első számjegye, akkor a gyök második számjegyének a ***nagyobb*** számot választjuk !

Módszer III.

Általános Módszer

Számítsuk ki az alábbi szám értékét!

$$\sqrt{289}$$

Osszuk a számjegyeket hátulról kettes számcsoportokra!

$$\sqrt{\boxed{2}\,\boxed{89}}$$

Páratlan számú számjegy esetén az első számjegy „egyedül marad”.

Keressük meg azt a legnagyobb egész számot, amit saját magával megszorozva legfeljebb az első számjegyet kapjuk!

$$\sqrt{2\ 89}$$

Ebben az esetben x * x ≤ 2 ,ami 1 lesz.

$$\sqrt{2\ 89}$$

Írjuk ezt a szám fölé és elé!

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \\ \boxed{1}\sqrt{2\,89} \end{array}$$

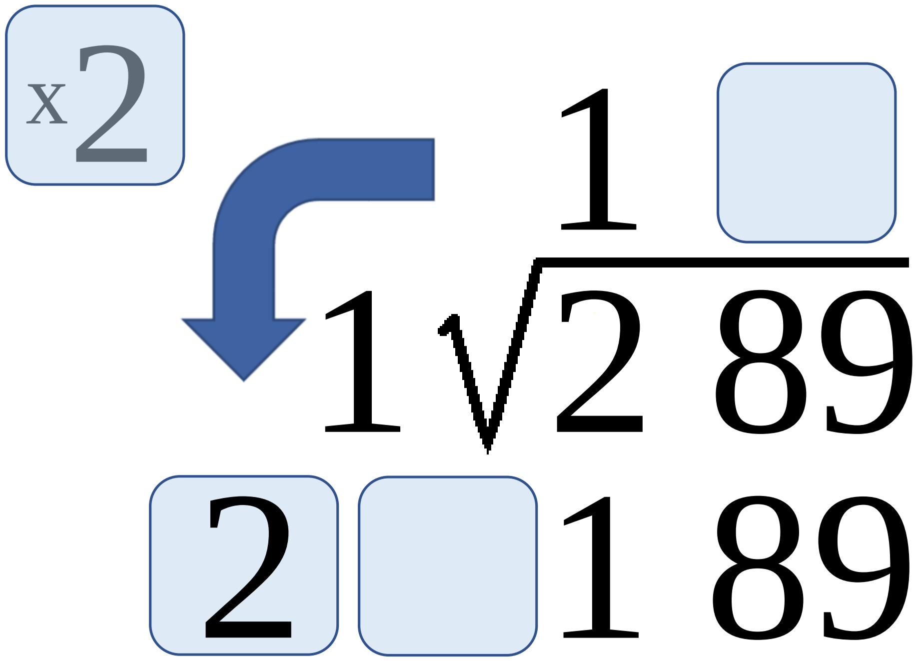
A két szám szorzatát (ami jelen esetben 1) vonjuk ki az első számjegyből, majd a maradékot írjuk a szám alá!

$$\begin{array}{r l} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \sqrt{2\ 89} \\ & 1 \end{array}$$

Tegyük mellé a következő két számjegyet.

$$\begin{array}{rl} & 1 \\ 1 & \sqrt{2\,89} \\ & 1\,89 \end{array}$$

Írjuk az új szám elé a felső kétszeresét!



Keressük meg azt a legnagyobb egész számot, amire igaz, hogy X * 2X ≤ 189!

$$\begin{array}{rl} & 1\ \boxed{7} \\ 1 & \sqrt{2\ 89} \\ 2\ \boxed{7} & 1\ 89 \end{array}$$

Ez a szám a 7,

mert 7*27=189

A két szám szorzatát (ami most 189) vonjuk ki a számból, majd a maradékot írjuk a szám alá!

$$
\begin{array}{rr}
 & 1\ \boxed{7} \\
1 & \sqrt{2\ 89} \\
\boxed{2\ 7} & \cancel{1\ 89}\ \ * \\
 & -1\ 89 \\
 & \boxed{0\ 00}
\end{array}
$$

Mivel maradék nincs, ezért a számítás pontos eredményt adott, azaz 289 négyzetgyöke éppen 17.

$$
\begin{array}{r}
17 \\
1\sqrt{2\,89} \\
27\ 1\,89 \quad * \\
-1\,89 \\
\boxed{0\,00}
\end{array}
$$

Módszer IV.

Newton gyökvonó algoritmusa (gyors és pontos)

Az algoritmus

Számítsuk $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges pozitív szám négyzetgyökét!

$\sqrt{\gamma}$ közelítő kiszámításához

válasszuk $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges pozitív számot (célszerűen $0 < x_0 < \gamma$)!

(x_0 minél közelebb van $\sqrt{\gamma}$ várható értékéhez, annál kevesebb lépésben érhető el a várt pontosságú eredmény.)

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{\gamma}{x_n}}{2}$$

Ekkor x1, x2, … értékek közelítenek $\sqrt{\gamma}$ -hoz, azaz $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \sqrt{\gamma}$

Az algoritmus pontossága

Számítsuk ki $\sqrt{10}$ értékét! Válasszuk x_0-nak 1-et!

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{\gamma}{x_n}}{2}$$

$\gamma = 10$

$x_0 = 1$

		$(x_n)^2$
$x_1 =$	5,50000000000000	30,25
$x_2 =$	3,65909090909091	13,38894628
$x_3 =$	3,19600508187465	10,21444848
$x_4 =$	3,16245562280389	10,00112557
$x_5 =$	3,16227766517567	10,00000003
$x_6 =$	3,16227766016838	10,00000000

4 értékes jegy → x_4

9 értékes jegy → x_5

15 értékes jegy → x_6

Módszer V.

Bolyai Farkas algoritmusa (trinom egyenletek megoldására)

Az $x^m = a + x$ egyenlet közelítő megoldása $(m > 2, m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^+)$

Számítsuk ki az alábbi sorozat elemeit! Legyen:

$$x_0 := 0 \text{ és } x_{n+1} := \sqrt[m]{x_n + a} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Tehát:

$$x_1 = \sqrt[m]{a},\ x_2 = \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a}},\ x_3 = \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a}}}, \ldots$$

Ekkor az egyenlet egyik pontos gyöke:

$$\boxed{x' := \lim_{n \to \infty} x_n}$$

Források

https://hu.wikipedia.org/wiki/A_matematika_története

https://hu.wikipedia.org/wiki/Gyökvonás

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0b/Ybc7289-bw.jpg

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/af/2064_aryabhata-crp.jpg/800px-2064_aryabhata-crp.jpg

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/03/Leonhard_Euler_by_Handmann.png/200px-Leonhard_Euler_by_Handmann.png

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/22/Ruffini_paolo.jpg

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/80/Niels_Henrik_Abel.jpg/250px-Niels_Henrik_Abel.jpg

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/53/Evariste_galois.jpg

https://www.youtube.com/watch?v=1rXVvBqm85c

https://www.youtube.com/watch?v=nUyLnjgGumg

https://www.youtube.com/watch?v=PJHtqMjrStk

https://cultura.hu/wp-content/uploads/2017/12/cultura-bolyai-janos-1.jpg

https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0012_szemleletes_analizis/adatok.html

https://math.uni-pannon.hu/~szalkai/Analizis1TK-animaciok.zip