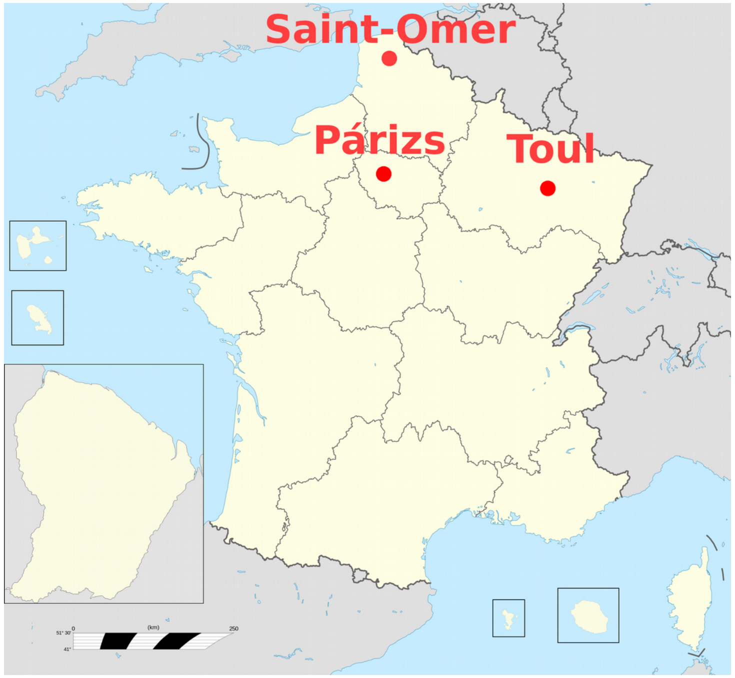
Joseph Liouville

(1809 - 1882)

Gyerekkora

- 1809-ben a franciaországi Saint-Omer-ben született
  - Nagybátyjával és testvérével élt együtt
  - Tanárai nem tartották okosnak, mert tanulás helyett sakkozni szeretett
- Napóleoni háborúk után apjukkal Toul-ba költöztek
  - Liouville ősi nyelveket tanult



Tanulmányok

- **Collège St Louis**, Párizs
  - Azonnal beleszeretett a matematikába
  - Már tizenévesen is saját bizonyításokon dolgozott
- 1825 – 1827: **École Polytechnique**, Párizs
  - André-Marie **Ampére**, fizikus és matematikus
  - Augustin-Louis **Cauchy**, mérnök, fizikus és matematikus
  - Siméon-Denis **Poisson**, mérnök, fizikus és matematikus
- 1828 – 1830: **École des Ponts et Chaussées**, Párizs
  - Mérnöki pálya elméleti és gyakorlati oktatással
  - Egészségi állapota romlik
  - Családi problémákkal küzd
- 1830: Megházasodik és otthagyja az egyetemet

Felemelkedés

- 1828-1831
  - Számtalan publikációt küld a párizsi akadémiának
  - 1830-as távozását követően Liouville önálló kutatásokba kezd Toul-ban
- 1831-1840: Megkezdődik akadémiai pályafutása
  - Asszisztens (1831), egyetemi tanár (1837), majd egyetemi professzor (1838) lesz
  - Heti 35-40 órát oktat, tanév közben Párizsban tanít és adminisztrál, nyáron Toul-ban kutat
  - Egyszerre több iskolában is dolgozik
  - 1836: Megalapítja saját folyóiratát „Journal de Mathématiques Pures et Appliquées” néven, azaz „A tiszta és alkalmazott matematikai folyóirata”
  - 1840: Helyet kap a **Bureau des Longitudes** intézetnél, melynek egyik feladata a világ óráinak szinkronizálása volt

Élete

- Liouville egyik legfőbb ellenfele **Libri** volt
  - Guglielmo Libri Carucci dalla Sommaja (1803 - 1869) olasz matematikus, tanulmányok és kéziratok ellopásáról lett végül híres
  - 1837 és 1840 között Libri és Liouville folyamatosan támadták egymás tanulmányait
  - 1840-ben Libri hevesen ellenezte Liouville kinevezését az „Académie des Sciences” köreibe
  - 1843-ban Liouville helyett Libri nyeri a „Collège de France”-ban megüresedett helyet
- Jóbarátja:
  - Jean-Daniel **Colladon** fizikus
  - Jacques Charles François **Sturm** matematikus
  - Lejeune **Dirichlet** matematikus
- Sturm és Dirichlet aktívan támogatta Liouville-t a Libri elleni harcban

Élete

- 1848-as „Februári forradalom” után beválasztják a republikánus pártba, de 1849-ben elveszti pozícióját
- Libri megszökött az országból, helyét 1851-ben Liouville kapta
- 1856 – 1857 volt Liouville legproduktívabb időszaka
- Egyre növekvő tanári kötelességei és Dirichlet 1859-es halála megviselte
- Folytatta a publikálást, de tanulmányai főként 1856-ban felfedezett eredményeit tartalmazták
- 1882-ben Párizsban, 73 évese érte a halál

Öröksége

- 1829 – 1837: Sturm-Liouville rendszer megalkotása
  - Alkalmas például bizonyos parciális differenciálegyenletek megoldására
- Liouville tétele (határozatlan integrál):
  - Newton: „*Ha `f` folytonos, akkor van primitív függvénye.*”
  - Liouville: *„Bizonyos függvények primitív függvénye nem írható fel képlettel.”*
  - Bizonyította, hogy ha egy elemi függvény integrálja elemi, akkor az integrált megadó képlet nem lehet sokkal bonyolultabb szerkezetű.
  - Példák:

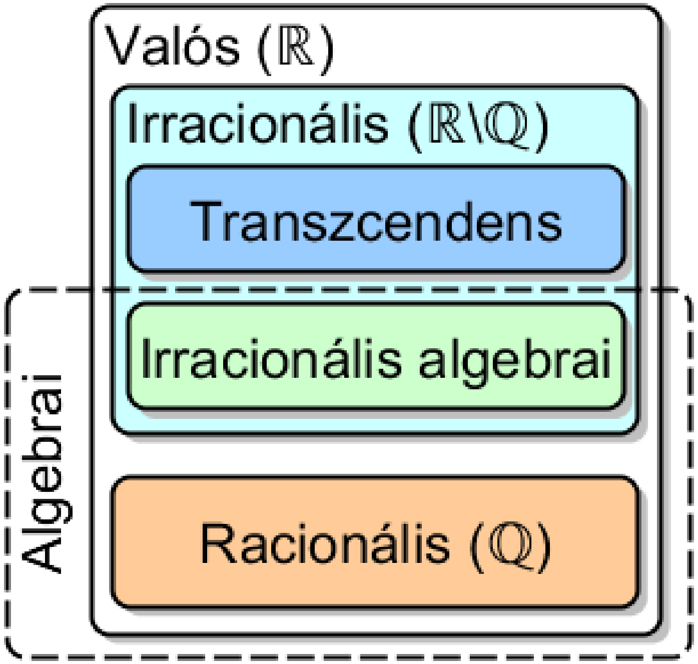
$$\int e^{-x^2}dx, \int \frac{e^x}{x}dx, \int \frac{sin(x)}{x}dx, \int \frac{1}{ln(x)}dx$$

Öröksége

- Liouville tétele (komplex analízis):
  - *„Ha egy egészfüggvény korlátos, akkor konstans.”*
  - Később Picard kis tételét fejleszti tovább
- Évariste **Galois** (1811 – 1832) francia matematikus kiadatlan munkásságát feldolgozta és 1843-ban publikálta
- Összesen 400 tanulmányt írt
  - Ebből 200 a számelmélet témakörével foglalkozik

Öröksége
Transzcendens számok

- Irracionális számok halmaza **algebrai** és **transzcendens** számok halmazára bontható
- Algebrai számok
  - gyöke egy racionális együtthatós nem azonosan nulla polinomnak
  - Irracionális algebrai például: $\sqrt{2}, \ \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$
- Transzcendens számok
  - „értelmen túli”
  - nem igaz rá az algebrai számok feltétele
  - Példa: $\pi, \ e$



Öröksége
Transzcendens számok

- 1682 – Gottfried Leibniz bizonyítja, hogy `sin(x)` nem algebrai függvénye *x*-nek.
- 1748 – Euler definiálja a transzcendes számokat
- 1768 – Lambert bizonyítja hogy π irracionális, publikálja sejtését, hogy π és e transzcendens
- Liouville érdeklődést mutat a témában
  - Tanulmányozza Goldbach és Bernoulli kapcsolatos műveit
  - Sikertelenül megpróbálja bizonyítani e transzcendenciáját

Öröksége
Transzcendens számok

- 1844: Liouville elsőként bizonyítja a transzcendes számok létezését
  - Ehhez a lánctörteket használja fel
- 1851: Liouville lánctörtek nélkül is bizonyítja állítását
  - Definiálja a transzcendes számok egy elégséges feltételét
  - Liouville konstans megszületése

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0.110001000000000000000001000\ldots$$

  - Liouville számok

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \qquad n \in \mathbb{Z}^+;\; p, q \in \mathbb{Z};\; q > 1$$

    - „majdnem” racionális számok
    - jól közelíthetőek racionális számok sorozatával

Öröksége
Transzcendens számok

- Liouville bizonyítását még további 50 évig tökéletesítették különböző matematikusok
  - 1909: Axel **Thue**
  - 1921: Carl Ludwig **Siegel**
  - 1947: Freeman **Dyson**
  - 1955: Klaus **Roth**
- Eredménye a Thue–Siegel–Roth-tétel, tehát

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \qquad \varepsilon > 0$$

egyenlőtlenségnek véges sok *p* és *q* relatív prím egész megoldása van

Példa

Theorem ("Rational Liouville theorem") Let f and g be algebraic functions of x with g non-constant. Then if the integral of $f.e^g$ is elementary, it is given by

$$\int f.e^g \, dx = R e^g$$

where R is rational in f, g and x.

$$\int e^{-x^2} = R(x)e^{-x^2} \quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

(P és Q relatív prímek)

$$e^{-x^2} = \frac{QP' - PQ'}{Q^2} e^{-x^2} - 2x\frac{P}{Q} e^{-x^2}$$

$$Q(Q - P' + 2xP) = -PQ'$$

(belátható, hogy Q konstans => Q_0)

$$P' - 2xP = Q_0$$

(Q_0 konstans tehát egyenlet lehetetlen)

Köszönöm a figyelmet!

Források:

- Jesper Lützen: „Joseph Liouville 1809–1882: Master of Pure and Applied Mathematics”
- Mohammed Al-Gwaiz: „Sturm-Liouville Theory and its Applications”
- Marchisotto & Zakeri: „An Invitation to Integration in Finite Terms”
- Leerawat & Laohakosol: „A Generalization of Liouville's Theorem on Integration in Finite Terms”
- Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: „Valós analízis I-II.”
- http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Liouville.html
- https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Liouville