



# Zene és matek

Spenger Kincső

2016.04.22.

# Minden zene matek

- Bár a zeneelméletnek nincsenek megdönthetetlen matematikai alapjai, a zenei hang leírható matematikailag
- A zene elemei, úgy mint a forma, ritmika, tempó mind kapcsolatba hozhatók az idő és frekvencia mérésével
- A zenehallgatás és zeneszerzés fejlődése elvezetett olyan matematikai területek alkalmazásához, mint a halmazelmélet, absztrakt algebra és számelmélet

# A Phytagoreusok

- Phytagoras tanait követő filozófiai iskola és közösség Kroton városában (i.e. VI. sz.)
- Elitista, arisztokratikus szervezet
- Szigorú szabályok szerint éltek, Phytagoras feltétlen irányítása alatt
- Felfogás: A számok állnak mindennek felett, a harmónia természetét is számokkal próbálták megragadni
- A harmónia keresése miatt gyakran kísérleteztek monochordon (egyhúrú hangszer)



# A monda

*„(...) Eközben egy kovácműhely mellett ment el, s valami isteni véletlen folytán meghallotta a kalapácsokat, amint az üllőn a vasat kalapálták, s hogy egymásnak egy kapcsolat kivételével vegyesen, de összhangzóan adták a hangokat. Felismerte ugyanis bennük az oktávot, a kvintet, a kvartot...berohant a kovácműhelybe, és sokféle kísérlet révén úgy találta, hogy a hangok különbségének oka a kalapácsok súlyában rejlik...Ez után a mértékeket és a kalapácsokkal a legteljesebben megegyező súlyokat pontosan megjegyezve hazatért, és átlósan a falakba erősített egyetlen cöveket...Erre felfüggesztett négy, azonos anyagú, azonos hosszúságú, azonos vastagságú és egyformán sodrott húrt, és pedig egyiket a másik mellé. A nehezekeket alsó részükre kötötte, úgy szerkesztve, hogy a húrok hosszúsága teljesen egyenlő legyen. Akkor felváltva, kettőnként megpendítette a húrokat, és így megtalálta az ...összhangokat. (...)”*

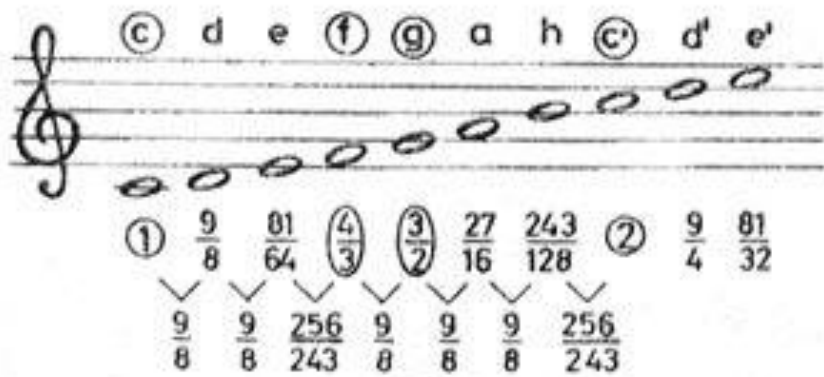
# Phytagoreusok – hangközök arányai

- A használt súlyok alapján felismerte a hangközök arányait:
  - 2:1      oktáv
  - 3:2      kvint
  - 4:3      kvart
- Kvart + kvint = oktáv (4:3, 3:2 >> 12:6 szorzás)



# A pythagorasi hangsor

- A hangok arányait kvintugrásokkal és oktávugrásokkal kapjuk meg (c, g, d', d, a, e', e, h)
- (A kvint és kvárt arányából kifejezett nagyszekundddal is meg lehet kapni)
- Sosem jutunk el a hang oktávjához: sem  $+3$ -nek, sem  $9/8$ -nak nincs olyan pozitív egész kitevőjű hatványa, amely 2 pozitív egész kitevőjű hatványát adja
- $(9/8)^6 \sim 2,02728$  – a fül számára elhanyagolható, mégsem pontos



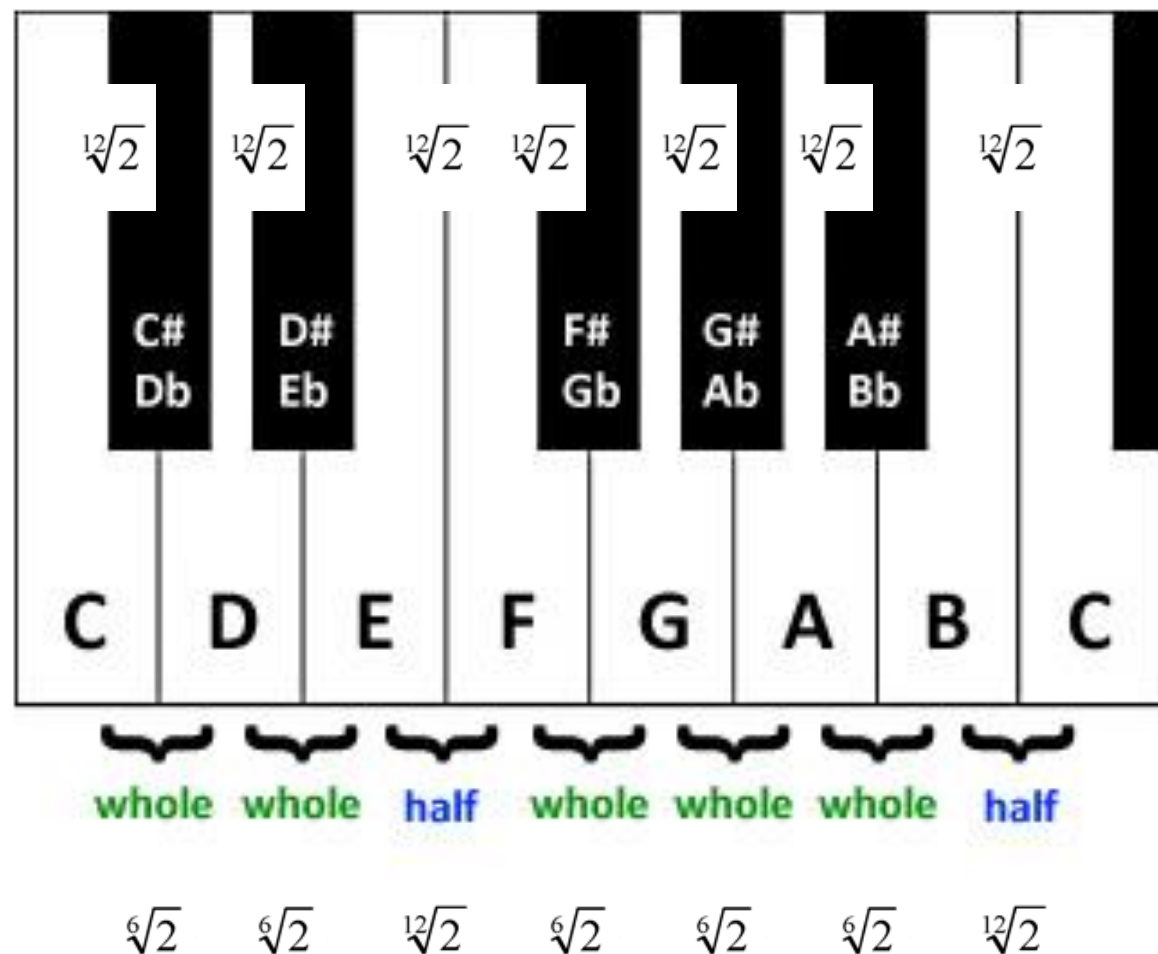
*Pythagorasi hangsor*



*Diatónikus skála*

# Temperált skála

- A XVIII. Században megjelent az igény a transzponálásra, vagyis hogy a skála bármely hangjára lehessen hangközöket építeni, ne csak a C-re
- Az oktávot 12 egyenlő részre kellett bontani



# Transzponálás

- Egybevágósági transzformáció: ha bármely P, Q pontokra teljesül, hogy

$$d(P,Q)=d(f(P),f(Q))$$

- A transzponálás EGYBEVÁGÓSÁGI (izometrikus) TRANSZFORMÁCIÓ, a hangok távolságának ugyanakkorának kell maradnia, mint az eredeti darabban
- Ha a pythagorasi vagy diatónikus skálákkal egy darabot más hangnemben játszánk, az eredmény borzalmas lenne >>> ezért volt szükség egyenlő hangközökre



# J. S. Bach (1685-1750)

- Minden hangnemben képes volt komponálni
- Imádott a szimmetriával játszani a darabjaiban
- A különböző szólamok egymás tükrözött, lassított vagy eltolt változatai, harmonizálnak egymással:
  - <https://www.youtube.com/watch?v=V5tUM5aLHPA>



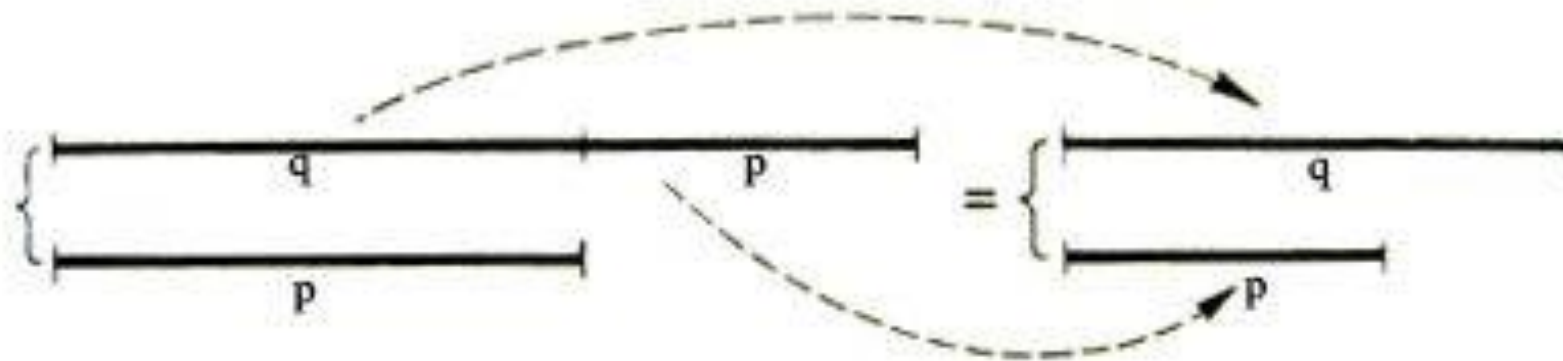
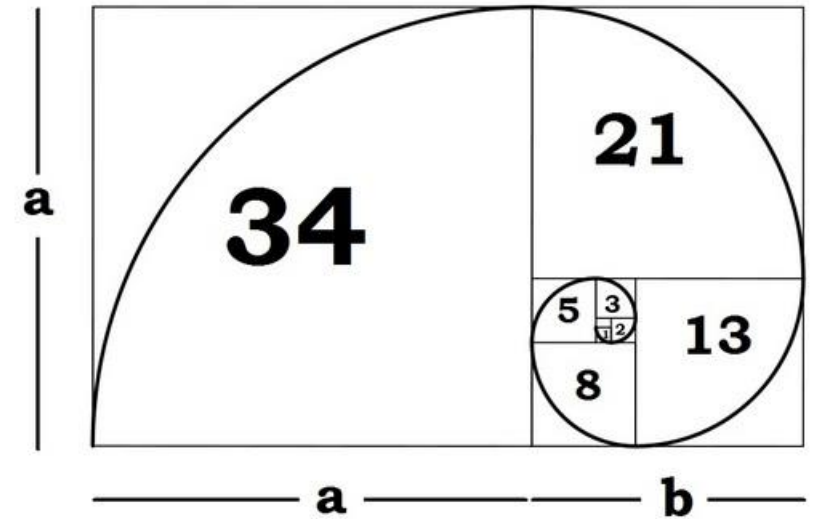
IV

Handwritten musical score for J.S. Bach's D minor Invention, measures 1-24. The score is in G-clef and F-clef, 2/4 time. Measures 1-4 are circled in red. Measure 1 contains a triplet of eighth notes (F4, G4, A4) in the treble and a quarter note (F3) in the bass. Measure 2 contains a triplet of eighth notes (B3, C4, D4) in the treble and a quarter note (G2) in the bass. Measure 3 contains a triplet of eighth notes (E4, F4, G4) in the treble and a quarter note (A2) in the bass. Measure 4 contains a triplet of eighth notes (A4, B4, C5) in the treble and a quarter note (B2) in the bass. Measures 5-8 show a sequence of eighth notes in the treble and a bass line of quarter notes. Measures 9-12 show a sequence of eighth notes in the treble and a bass line of quarter notes. Measures 13-16 show a sequence of eighth notes in the treble and a bass line of quarter notes. Measures 17-20 show a sequence of eighth notes in the treble and a bass line of quarter notes. Measures 21-24 show a sequence of eighth notes in the treble and a bass line of quarter notes.

Continuation of the handwritten musical score for J.S. Bach's D minor Invention, measures 25-48. Measures 25-28 show a sequence of eighth notes in the treble and a bass line of quarter notes. Measures 29-32 show a sequence of eighth notes in the treble and a bass line of quarter notes. Measures 33-36 show a sequence of eighth notes in the treble and a bass line of quarter notes. Measures 37-40 show a sequence of eighth notes in the treble and a bass line of quarter notes. Measures 41-44 show a sequence of eighth notes in the treble and a bass line of quarter notes. Measures 45-48 show a sequence of eighth notes in the treble and a bass line of quarter notes.

# Az aranymetszés

$$p < q$$
$$(p+q):q = q:p$$



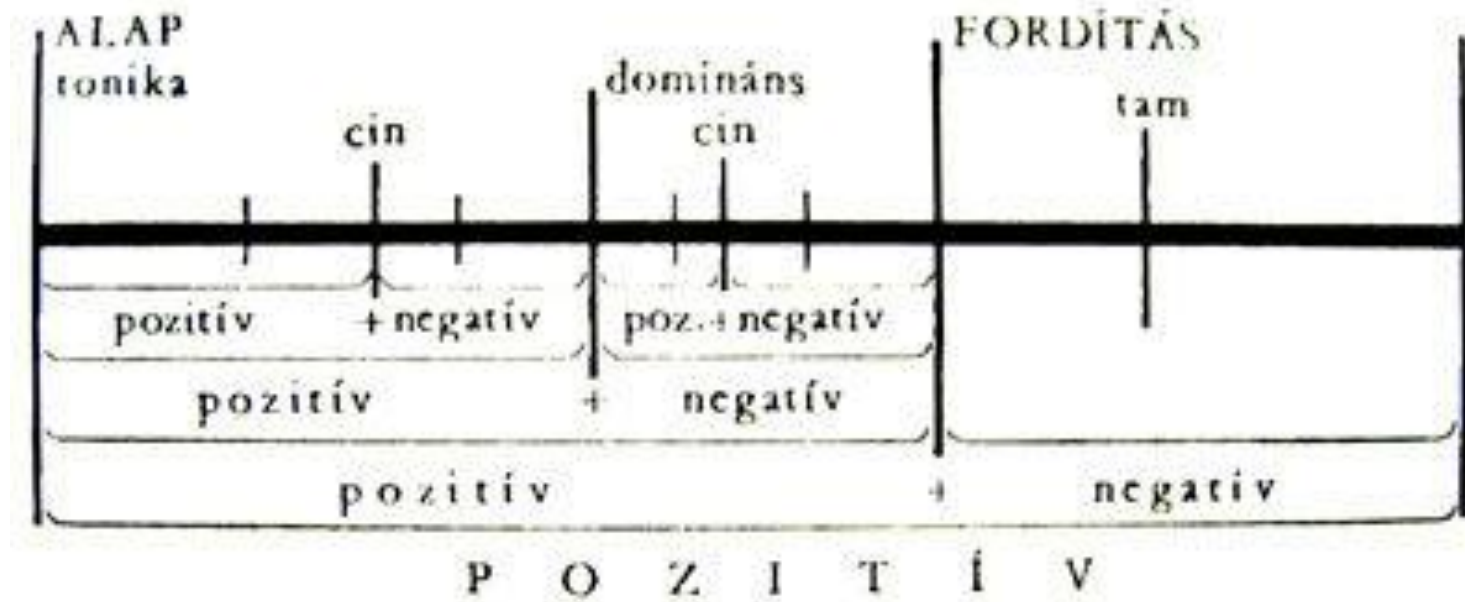
Hosszú+rövid szelet sorrend fennállása esetén pozitív (0,618), rövid+hosszú aranymetszet fennállása esetén pedig negatív (0,382) aranymetszetről beszélünk.

# Bartók és az arany metszés

- Az arany metszés a zenében nem egyértelmű. Milyen szempont szerint vizsgáluk? Ütemszám? Hangok távolsága?
- Nagyon ritka, hogy az arany metszetet pontosan felfedezhetjük, ha ösztönös komponálásról van szó, van pár eltérés
- Bartók zenéjében gyakori az a hangzattípus, ami csupa Fibonacci sejtéből épül fel, vagyis az akkord minden hangjához megszólal a 2, 3, 5, 8 hangköz
- A különböző szólamok, témák belépése, a fordulópontok is sokszor pontosan metszéspontokon állnak

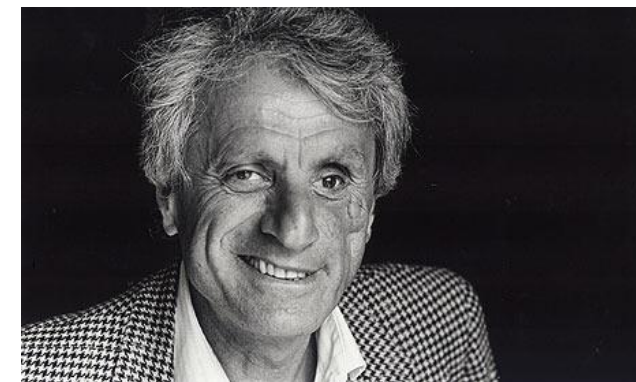


# Bartók Béla: 2 zongorás, ütőhangszeres szonáta I. tételének felépítése

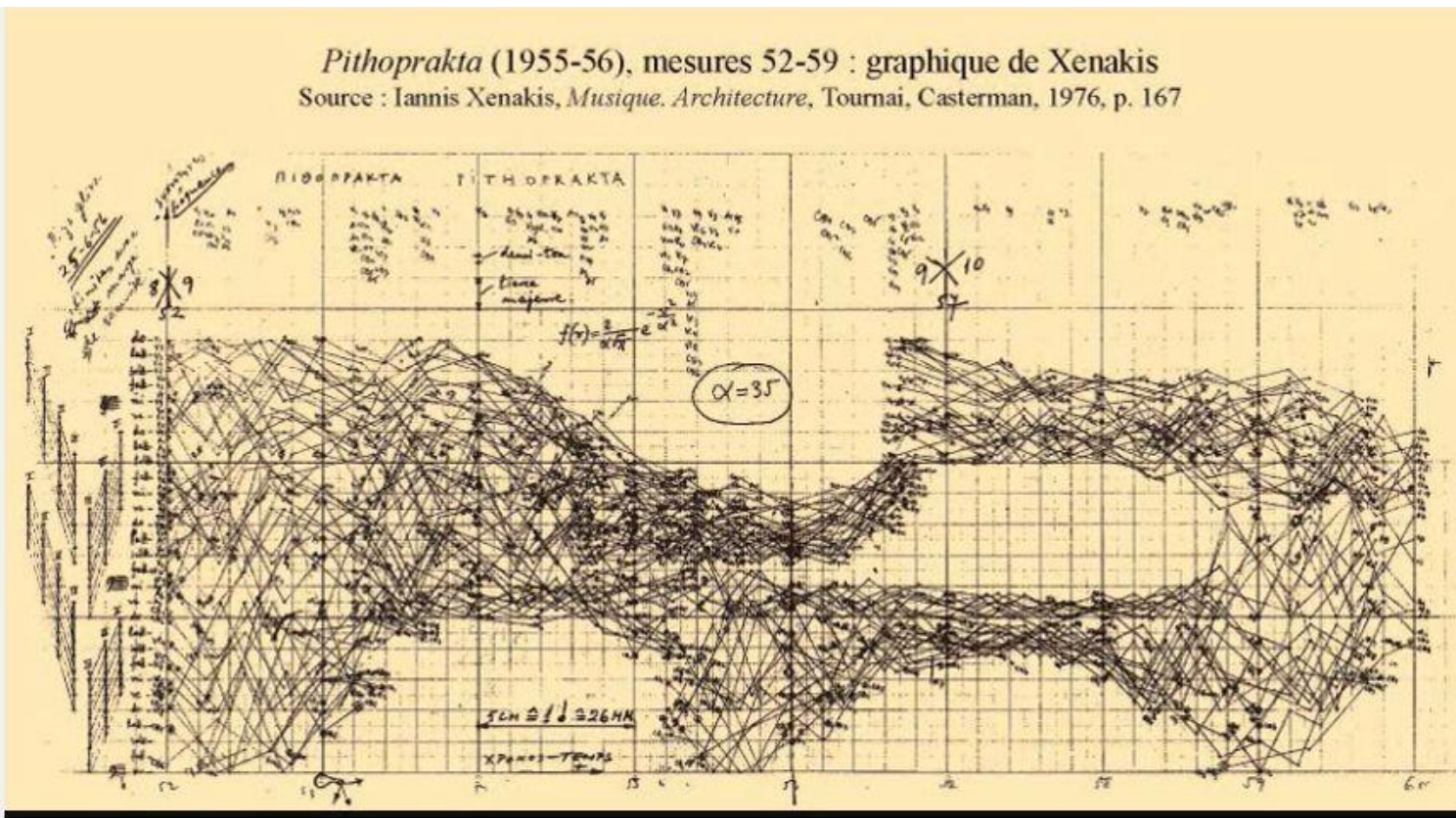




# Iannis Xenakis (1922-2001)



*Pithoprakta* (1955-56), mesures 52-59 : graphique de Xenakis  
Source : Iannis Xenakis, *Musique. Architecture*, Tournai, Casterman, 1976, p. 167



- A szólamok hangjainak időbeni eloszlásához, magasságához, hangerejéhez különböző matematikai és fizikai képleteket használt fel
- Pithoprakta – gáz statikus mechanikája (Maxwell-Boltzmann eloszlás)

# 2016 - kutatások

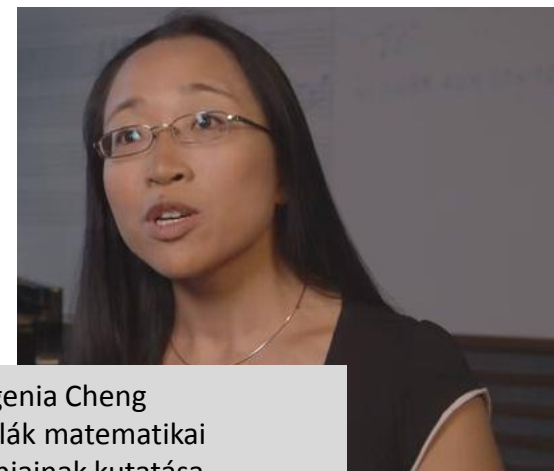
- A mai napig sokan kutatják, hogyan épül fel egy darab, mi különbözteti meg a jó zenét a random egymás után dobált hangoktól



**Dmitri Tymoczko**  
Sokoldalú testekkel  
ábrázolja a hangokat  
Szerinte a fülünk a  
hangok távolságára  
érzékeny



Santa Fe Institute  
Szimmetria, harmóniák,  
fraktálok kutatása a  
zenében, prímek  
Külön projekt a zene és  
matek kapcsolatának  
kutatására



Eugenia Cheng  
Skálák matematikai  
alapjainak kutatása  
Zongorista és matematikus

Köszönöm a figyelmet!