Bolyai János matematikai munkássága

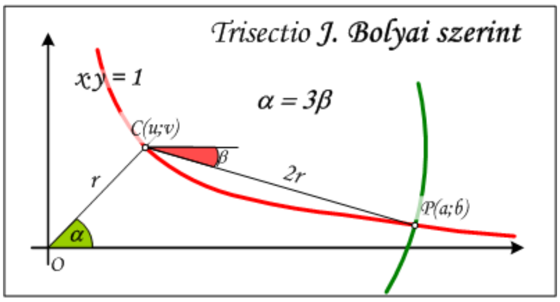
1. Bevezetés

A magyar tudomány egyik leghíresebb alakjaként tartják számon **Bolyai Farkas matematikus fiát**, és egyben tanítványát: Bolyai Jánost. A "geometria Kopernikusza" [1] **1802 telén** látta meg a napvilágot **Kolozsvárott** a család első gyermekeként. Valóságos **csodagyereknek tartották**. Már hét évesen jelét adta nem mindennapi képességének azáltal, hogy ilyen fiatalon németül tanult, valamint a zene iránt érdeklődve hegedülni is elkezdett tanulni. Mitöbb, tizenkét évesen már a kollégium padjait koptatta, ráadásul rögtön **negyedik osztályosként vágott neki az iskolának**. Apja szerette volna a Göttingeni Egyetemre járatni a fiát, azonban Gauss, a világhírű matematikus - aki Bolyai János életének alakulásában később is szerepet játszott - nem segített az ifjú tehetségnek az egyetemre való bekerülésben. Emiatt János a **bécsi hadmérnöki akadémián folytatta tanulmányait**. Az akadémia tananyag nem kötötte le az ereje teljében lévő Bolyait így iskola mellett elkezdhette gyarapítani matematikai felfedezései hosszú sorát. A következőkben bemutatom néhány bekezdésben azokat a **természettudományos és matematikai eredményeke**t, amivel Bolyai János kiérdemelhette "az erdélyi tudományosság legkiemelkedőbb képviselője" címet.

2. Geometria

2.1. Szögharmadolás

Egyik diákkori eredményével kezdeném, amely az ókor **egyik híres problémájára**, a szögharmadolásra vonatkozik. Ez a feladat azt kéri, hogy csak körző és vonalzó segítségével osszunk fel egy **tetszőleges szöget három egyenlő részre**. Amint később beigazolódott, a kitűzött szerkesztés általános esetben nem végezhető el. János 17 éves korában kimutatta,



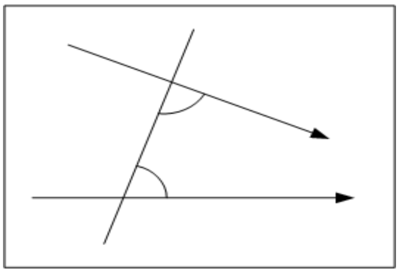
hogy ha felhasználhatja azt a meghúzott görbét, amit mi **egyenlő oldalú hiperbolának** nevezünk, akkor a szögharmadolás elvégezhető.

2.2. Nem-euklideszi geometria

Az első, leginkább **korszakalkotónak mondható felfedezése**, amit 1820 és 1823 között dolgozott ki, mindössze 20 évesen, az a **nem-euklideszi geometria**. Azzal a ténnyel ő maga is tisztában volt, hogy nagy dolgot alkotott meg, ugyanis e sorokat írta apjának Temesvárról, amelyben új geometriai eredményeiről számolt be. A levél szokásosan kezdődik, hosszasan válaszolt benne apjának a binomiális képlettel kapcsolatos felvetésére, majd a végén, mintegy mellékesen, odavetette: *„ ... olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elámultam, s örökös kár volna elveszni; ha meglátja Édes Apám, megismeri; most többet nem szóllhatok, csak annyit: hogy semmiből egy újj más világot teremtettem; mindaz, valamit eddig küldöttem, csak kártyaház a toronyhoz képest. Meg vagyok győződve, hogy nem sokkal fog kevesebb becsületemre szolgálni, mintha feltaláltam volna."*[2] A nem-euklideszi geometria - amelyet abszolút, illetve hiperbolikus geometriának neveztek neves kortársai - egy **az euklideszi geometria axiómarendszerétől eltérő alapokra épített rendszer**[3]. A probléma ami elvezette őt a geometria ezen új ágához, az „**paralellák**" problémája volt, amivel 18 évesen kezdett foglalkozni, apja intelmei ellenére. Nézzük magát a problémát és Bolyai megoldását:

Eukleidész az Elemek I. könyvében definiálja az egyenesek párhuzamosságát:
23. definíció: Két egyenes párhuzamos, ha azok egy síkban fekszenek és mindkét irányban meghosszabbítva nem metszik egymást.

Az évezredes problémát okozó 5. posztulátum pedig kimondja, hogy:
Ha egy egyenes úgy metsz két egyenest, hogy az egyik oldalán keletkező belső szögek összege kisebb két derékszögnél, akkor e két egyenes a metszőnek ezen oldalán meghosszabbítva metszi egymást.



Elemzők úgy vélik, hogy Eukleidész a posztulátumban megfogalmazott állítást a **bizonyításának sikertelensége miatt emelte ki a tételek precíz sorozatából**. Már Eukleidész első kommentátorainak feltűnt, hogy a párhuzamoshoz nagyon közeli metszők nagyon távoli találkozása tapasztalattal nem ellenőrizhető, tehát az 5. posztulátum nem magától értetődő, **nem olyan, amit bizonyítás nélkül el lehetne fogadni**, s ezért megkísérelték levezetni. Próbálkoztak azzal is, hogy a posztulátumot, vagy a párhuzamosok euklideszi definícióját más fogalmazásokkal helyettesítsék. Ám az alternatív definíciók és axiómák nem vezettek célra. [5] Mint Bolyai és kortársa, Lobacsevszkij eredményéből is kiderült, az állítás a többi feltételből (maradék axiómarendszer) nem következik, így **csak axióma (alapfeltevés)** lehet. Bolyai ezen elméletének bemutató műve, az **Appendix**, 1832-ben jelent meg, **függelékként** apja Tentamen című két kötetes matematikai művéhez. A nem-euklideszi geometria megjelenése **váratlan eseménye volt a kor matematikájának**. Sőt, az egész matematikai közvélemény ennek épp az ellenkezőjét várta – tehát a párhuzamosok problémájának klasszikus értelemben történő megoldását. [4]

2.3. A nem-euklideszi geometria ellentmondás-mentessége

Bolyai Jánost élete végéig foglalkoztatta az új geometriájának ellentmondás-mentessége, valamint, hogy a valóságban, vagyis a **világegyetem térviszonyainak leírásában** melyik geometriai rendszer érvényes, a E vagy az S. Ezt a kérdést még az Appendix-be is bevette. Azt már az Appendix-ben kimutatta, hogy az S-rendszerbeli F felületen az euklideszi geometria érvényes. Tehát ha az **euklideszi geometriában** valamilyen **ellentmondás** észlelhető, akkor ez **megjelenik az S rendszerben** is, és ugyanakkor, ha az S-ben nincs logikai ellentmondás, akkor nem lehet a hiperbolikus térbe (S-rendszerbe) beágyazott paraszférán (F felületen) sem. Bolyai tehát ezen az úton észrevette, hogy az S ellentmondástalanságából következik a ∑ ellentmondás-mentessége. A Bolyai által megvilágított helyes megoldási út az úgynevezett **modellmódszer**. Hangsúlyozandó, hogy a **modell fogalma és annak alkalmazása Bolyai János művében fordul elő először**. Ő tudta és többször kijelentette, hogy bizonyos S-rendszerbeli felületeknek megvan a maguk sajátos belső geometriája. Világosan felismerte, hogy a paraszférán az euklideszi, a hiperszférán a hiperbolikus geometria tételei érvényesek.[6]

2.4. Komplex számok a geometriában

A tér abszolút igaz tudományának a kidolgozása után Bolyai Jánosnak a komplex számokra vonatkozó kutatásai a legjelentősebbek. Kézirataiban Bolyai többször hangoztatja, hogy az általa **felfedezett új geometriában észrevette a komplex számok jelentőségét**. Bolyai idejében nem tekintették általánosan elfogadott fogalomnak a komplex számokat még matematikus körökben sem, ugyanis a komplex számok elméletének kidolgozása még gyerekcipőben járt. János, apjának köszönhette azt, hogy lehetősége nyílt egy **pályázat**

keretében bemutatnia a komplex számokról alkotott téziseit, második legjelentősebb műve, a **Responsio** közvetítésével. Bár a kiírás a képzetes mennyiségek szerkesztéséről szólt, János inkább az értelmezésükkel, geometriai szerepükkel és más hasonló **mély problémával foglalkozott**. Az általa *elegynyi* vagy *elegyes szám n*évvel illetett komplex számokat, a kortárs Hamiltonhoz hasonlóan rendezett valós számpárként fogta fel. A komplex számok mértani alkalmazását illetően pedig visszautalt az *Appendix*ben kifejtett geometriájára. Bolyait a pályázat eredménye **hatalmas csalódásként** érte, ugyanis a bírák egyáltalán nem ismerték művét, sőt még a jelöléseit sem, így az elmélet szokatlansága és a vázlatos kidolgozottság miatt nem értékelték a művet érdemének megfelelően. Paul Stäckel, aki a legtöbbet tett a Responsio nemzetközi megismertetése érdekében, így ír: *„Ha nem is volt elég ereje, hogy gondolatait tisztázza és kialakítsa, ha fájdalom, nem adatott meg neki, hogy ifjúsága sokat ígérő gyümölcsét megérlelje, a képzetes mennyiségek elméletére vonatkozó alkotásai mégis méltók az Appendix szerzőjéhez, és örök időre helyet biztosítanak neki ennek az elméletnek a történetében* ." [7] Bolyait lesújtotta ugyan a sikertelenség, és visszakérte a dolgozatot, ennek ellenére tovább foglalkozott a komplex számokkal.

2.5. Raumlehre

A Raumlehre Bolyai **utolsó nagyobb terjedelmű matematikai munkája**. Ebben a **német nyelvű kézirat**ban igyekezett egy **axiómákra épített geometriai rendszert** kialakítani, azonban szellemi- és alkotóereje már 48 éves korában sajnos kezdte elhagyni, ezért a magyarul Tértannak nevezett dokumentumból már **hiányzik az Appendix-re végig jellemző** csodálatos, kristálytiszta logikai felépítés és előadásmód. Még itt-ott felcsillannak a Bolyait jellemző eredeti ötletek, azonban egy-két paragrafusban túl messze elkalandozik, és néha alig lehet megérteni, hogy mit is akar mondani. Bolyai **szellemi hanyatlása** ellenére művében sikerült lerakni annak a **topológiának az alapjait**, ami csak fél évszázaddal később született meg. Ezen kívül foglalkozott még írásában a **egyszerű mértani alakzatokkal**, a ponttal, egyenessel, az abszolút síkkal, szerkesztésekkel, szögekkel és sokszögekkel is. Sőt a Raumlehre-hez készült jegyzeteiben még más kérdésekre is válaszokat keres. Paul Stäckel mutatott rá, hogy milyen nagy jelentőséggel bírnak Bolyainak a Raumlehre című munkához **csatolt jegyzetei**. Ezekben a poliéderekre vonatkozó **Euler-féle összefüggéssel** valamint az **egyszerű felületek különböző fajainak a tárgyalásával** foglalkozik. A tárgyalt mű a bizonysága annak, hogy alkotóképességét - habár meggyengülve is - élete végéig megőrizte.

3. Számelmélet

3.1. Komplex számok a számelméletben

Újabb ismeretek szerint János célja az volt, hogy a számelmélet **egyes fogalmait és tételeit a komplex számokra is kiterjessze**. Foglalkozott többek között a prímszámokkal, prímtényezőkre való bontással, illetve a **komplex számok kongruenciájával** is, ez utóbbit illetően pedig több figyelemre méltó megállapítást is tett. Sőt abban az esetben, ha Bolyai ezeket a felfedezéseit olyan részletességgel publikálja, mint ahogy tervezte, akkor minden bizonnyal ma az egész világon a **komplex számok elméletének egyik legjelentősebb megalapozójaként tartanák számon**, ebben azonban rossz egészségügyi állapota megakadályozta. Mindezeket az információkat Kiss Elemér kutatásai révén tudhatjuk magunkénak. Mindezzel bővült ismeretanyagunk Bolyai János komplex számok terén végzett kutatásairól, és ezzel együtt a Bolyai-kutatás egyik fehér foltja tűnt el.

3.2. Álprímszám

Számelmélet munkája közül megemlítendő az **első álprímszám megtalálása**. A kis-Fermat tétel fordítottjának bizonyításán munkálkodott, hogy megtalálja a hőn áhított **prímszámképletet**, amit fel kellett, hogy adjon, ugyanis, mint kiderült a kis-Fermat tétel fordítottja általánosan nem érvényes. A képlet helyett azonban az álprímszámokba botlott bele.

3.3. Prímszámok

Továbbá, Bolyai János **négyféleképpen bizonyította** azt a tételt, mely szerint a **4n + 1 alakú prímszámok**, ahol n egy természetes szám, egyértelműen **felírhatók két egész szám négyzetének összegeként**, miután apja felhívta ezen prímszámokra fia figyelmét. Bizonyításánál János a komplex egészeket is felhasználta. Bolyai foglalkozott még **a 2n + 1, valamint az úgynevezett Fermat-féle** számokkal is. Ezek a számok többek között - amint az Appendix befejező mondatai igazolják - azért foglalkoztatták őt, mert komoly szerepet játszanak a szabályos sokszögek körzővel és vonalzóval történő gaussi szerkeszthetőségi elméletében.

3.4. Wilson-tétel és megfordítása

Bolyai János **kézirataiban a Wilson tételével kapcsolatos gondolatok** is előfordulnak. Ez a tétel **kimondja, hogy ha p prímszám, akkor (p-1)! +1 osztható p-vel**. Ennek a tételnek a fordítottja is igaz: ha (n-1)! +1 osztható n-nel, akkor n prímszám. Gauss a Disquisitiones arithmeticae című munkájában - amelyből a Bolyaiak számelméleti ismereteik legnagyobb részét merítették - furcsamódon nem tesz említést a **fordított tételről** ugyanis még művének megjelenése előtt már mások is igazolták. Farkas erről mit sem tudva, felveti a fordított tétel bizonyításának a gondolatát. Apja kezdeményezésére János azonnal megadja ennek bizonyítását. Illetve, annak ellenére, hogy a Gauss művében már megtalálta a Wilson-tétel bizonyítását János kidolgozta a sajátját is.

3.5. Mersenne-féle szám

Bolyai János egy időben azt sejtette, hogy a **prímszámok képletét** a 2^n-1 alakú számokban fogja majd megtalálni. Így jutott el a Mersenne-féle számhoz. Bolyai nem értesült Mersenne azon észrevételéről, hogy 2^{11}-1 összetett szám, viszont erre **kortársától függetlenül is rájött**, mint ahogy levelében olvasatjuk:

„Azt megmutatni, hogy bármely 2^p-1 alakú szám prím mihelyt p prím, ugyanakkor amikor 2^{2^m}+1-gyel bajlódtam,magam is megkíséreltem, mert amint irataim megmutatják én is abban a sejtelemben voltam, hogy 2^p-1 mindig prím, ha p prím. Ez egy történeti fontosságú felfedezése volna a legelső olyan függvénynek, mely mindig prímet ad. Azonban ez sem valósul meg, mert például $2^{11}-1 = 2047 = 23 \cdot 89$. . ." [8]

3.6. Ruffini-Abel tétel

Különös jelentőséggel bír annak a kérdésnek a tisztázása is, hogy egy adott algebrai egyenlet esetében hogyan kapjuk meg az egyenlet gyökeit. Ez a kérdés a 16. századtól kezdve élénken foglalkoztatta a matematikusokat. Bolyai éveken át **foglalkozott a négynél magasabb fokú egyenletek megoldási lehetőségeivel**, azonban idővel tudatosan felmérte próbálkozásainak sikertelenségét, és két különböző kézirati töredékben megfogalmazta a Ruffini-Abel-tételt, azaz hogy a négynél magasabb fokú általános algebrai egyenletek esetében **nincsenek gyökmeghatározó képletek**. Sőt az egyikben annak bizonyítását is megkezdte, de sajnos folytatása hiányzik.

3.7. Minden differenciál véges intergrálása

A Bolyai által kitűzött témakörök között szerepel még egy másik „megoldhatatlan" probléma „minden differenciál véges integrálása" címen. Ezt a témakört szintén abban az időben tisztázták. Kimutatták, hogy az úgynevezett **elliptikus integrálok eredményei nem fejezhetők ki véges alakban írt elemi függvényekkel**. Bolyai az ilyen típusú függvények integrálásának a nehézségeibe főleg akkor ütközött, amikor a hiperbolikus térbeli tetraéderek köbtartalmát akarta kiszámítani. Ezen a téren végzett vizsgálatairól **kéziratai talán még mindig tartogatnak meglepetéseket**.

3.8. Bűvös négyzet

Érdemes említést tenni a Bolyai János által szerkesztett bűvös négyzetről. A bűvös négyzet egy természetes számokkal képezett olyan **négyzetes mátrix**, amelynek minden sorában, minden oszlopában és minden átlójában lévő **számok összege ugyanaz**. A Bolyai bűvös négyzete **általánosan van megszerkesztve** így, ha a betűk helyére különböző értékeket helyettesítünk, miközben figyelünk arra, hogy csakis természetes számokat kapjunk, akkor más-más felépítésű bűvös négyzetekhez jutunk. Gauss annak a tételnek a bizonyítását adja erre, hogy minden komplex együtthatójú algebrai egyenletnek van megoldása (gyöke) a komplex számok testében.

3.9. Bolyai algebrai sokszínűsége

Befejezésül mindenképpen megemlítendő az, Bolyai János a fentebb felsoroltakon kívül még **rengeteg számelméleti problémával** foglalkozott:

Egyik feljegyzésében a következő kijelentés bizonyítását találjuk: ha a és b egymáshoz relatív prím számok, akkor $2^a - 1$ és $2^b - 1$ is **relatív prím számok**. A kijelentés fordítottját nem említi Bolyai, viszont az is igaz.

János a **kettes számrendszerről és annak hasznosságáról is nyilatkozott**: *"erő kíméléséért s egyszerűségért inkább a kettős szám írásmódot kellene bevenni..."*

Bolyai megfigyelte, hogy a természetes számok között rendkívül szabálytalanul fordulnak elő a prímszámok. Foglalkozott tehát a **prímszámok sűrűségével** is.

A matematikus felismerte azt is, hogy **4272943 egy prímszám**. Hogy hogyan jutott erre a következtetésre azt nem tudni.

Egyéb számelméleti kalandozásaiban érintette többek között: az **elsőfokú diofantikus egyenleteket**, a **Pell-féle egyenleteket**, az **eratoszthenészi szitát** és a **tökéletes számokat** is.

4. Összegzés

Összegezve elmondható, hogy Bolyai János egy eredeti tudós volt, akit a **matematikának minden ága** érdekelt. **Legkedvesebb témakörének a geometriát tartotta**, ezzel érte el legnagyobb felfedezéseit. Megalkotott egy új geometriát, amit **nem-euklideszi geometriának** nevezünk, foglalkozott még a **geometriák ellentmondás-mentességével**, valamint a **Riemann-terekkel**. A geometriával kapcsolatban érintette még a **komplex számok** kérdés körét is. Foglalkozott továbbá **számelmélettel**, amelyben több olyan tulajdonságot és tételt fedezett fel, melyeket jóval későbbi, de szerencsésebb körülmények között dolgozó **matematikusok újra feltaláltak és nyomtatásban közöltek**, ezért ma ezek az eredmények az ő neveikhez fűződnek. Mindenképpen **tudni kell**, hogy Bolyai János úgy lett a magyar tudomány egyik legnagyobb alakja, hogy tudományos **segédeszközei is hiányosak** voltak. Nem jutottak el hozzá korának matematikai folyóiratai, így szinte a **világtól elzárva** alkotta meg jelentős matematikai elméleteit.

„Nemcsak kis Erdélyünk, hanem az összes tudós világ, mely előtt egy rövid számtani művével honunknak fényt, dicsőséget szerzett, sokat vesztett kora halála által, mert nagybecsü kéziratait nem adhatá, elhatározott czélja szerint, sajtó alá, s kérdés vajon sikerülend-e avatott kezeknek ugy rendbeszedni s világ elibe bocsátani, hogy magas értékök szerint méltó elismerést vivjanak ki. Mint nyelvész és hegedümüvész is rendkívüli egyéniség volt.”
Dózsa Dániel nekrológja a Kolozsvári Közlöny 1860. február 5-i számában

Irodalomjegyzék

[1] http://www.szekelyhon.ro/aktualis/a-geometria-kopernikuszara-emlekeznek/print

[2] http://www.ms.sapientia.ro/~kasa/Bolyai-vacsora.pdf

[3] https://hu.wikipedia.org/wiki/Nemeuklideszi_geometria

[4] http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/rovatok/limes/toth.html

[5] https://hu.wikipedia.org/wiki/P%C3%A1rhuzamoss%C3%A1gi_axi%C3%B3ma

[6] Weszely Tibor -Bolyai János (mek.niif.hu/05400/05456/05456.pdf)

[7] Paul Stäckel: Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai (http://mek.oszk.hu/14700/14732/14732.pdf)

[8] Kiss Elemér - Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából (http://mek.oszk.hu/05300/05321/05321.pdf)