David Hilbert élete és problémái

Szemelvények a matematika történetéből

Mudra Lilla, Lénárt Bálint

Életrajz

- 1862. január 23. Könisberg (ma: Kalinyingrád - Oroszország)
- Könisbergi Egyetem
  - Professzora: Ferdinand von Lindemann
  - Barátai: Adolf Hurwitz és Hermann Minkowski
- 1885. megszerzi doktorandusát és körbeutazza Európát
- 1886 – 1895 professzor a Könisbergi Egyetemen, utána haláláig a Göttingeni Egyetemen professzor
- Doktorandus tanítványai híres matematikusok lettek

Életrajz

- 1900. augusztus 6 – 12: II. Nemzetközi Matematikai Kongresszus (Párizs)
  - Hilbert előadást tartott a kor nagy problémáiról
- 1902 – 1939: szerkesztő a kor vezető matematikai lapjának (Mathematische Annalen)
- 1910: másodikként (és kilencven éven át utolsóként) kapta meg a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai-díját
- 1943. február 14.-én halt meg 81 évesen Göttingenben

Alkotókorszakai

- Életében az invariánsok elméletével és a számelmélettel foglalkozott leginkább
- Kolgomorov nyolc alkotókorszakot határozott meg:
  - 1885 – 1893: invariáns elméletek
  - 1893 – 1898: algebrai számelmélet
  - 1898 – 1902: geometria alapjai
  - 1900 – 1906: variációszámítás és differenciál-egyenletek
  - 1900 – 1910: integrál-egyenletek elmélete
  - 1908 – 1909: Waring-problémák megoldása
  - 1910 – 1912: elméleti fizika
  - 1922 – 1939: matematika logikai alapjai

1. A kontinuumhipotézis

- A matematika halmazelmélet nevű ágának egyik kijelentése
- A hipotézis szerint nincs számosság a megszámlálhatóan végtelen és a kontinuum számosság között

<u>Tétel (Cantor):</u> Ha H egy tetszőleges halmaz és a P(H) halmaz számosságára érvényes a következő „szigorú" egyenlőtlenség:

$$|H| < |P(H)|$$

1. A kontinuumhipotézis

A természetes számok számossága: $\aleph_0$, a rákövetkező számosságot jelöljük $\aleph_1$-el. Belátható, hogy $\aleph_0$ számosságát nem hagyhatjuk el összeadással, szorzással, de hatványozással igen:

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

A hipotézis azt mondja, hogy

$$\aleph_{x+1} = 2^{\aleph_x}$$

Tétel (Gödel): Minden *ellentmondásmentes*, a *természetes számok elméletét tartalmazó*, *formális-axiomatikus elméletben megfogalmazható* olyan mondat, mely se nem *bizonyítható*, se nem *cáfolható*. (1940)

Ez azt jelenti, hogy a **van** választ nem lehet bebizonyítani.

1. A kontinuumhipotézis

- Cohen bizonyításai alapján tudjuk, hogy kontinuum hipotézis konzisztens és független, azaz az állításnak sem a ZF-hez való hozzátétele sem az állítás tagadásának hozzáadása nem okoz ellentmondást. Ugyanez igaz a kiválasztási axiómára is.
- A fenti eredmény azt igazolja, hogy a **nincs** választ sem lehet bizonyítani.
- 1963

2. Bizonyos számok transzcendenciája

- Matematikában azokat a valós és komplex számokat nevezik **transzcendens**nek, amelyek nem algebrai számok, amelyek tehát nem gyökei egész (vagy racionális) együtthatós polinomnak.
- Kérdés: Ha *a* 0-tól és 1-től különböző algebrai szám, *b* pedig irracionális algebrai szám, akkor a^b mindig transzcendens?
- 1934-ben Gelfond, majd 1935-ben Schneider egymástól függetlenül bebizonyították (Gelfond-Schneider-tétel). A válasz: IGEN
- Az Euler-féle azonosságból levezethető, hogy a e^{π} szám transzcendens.

3. Probléma a prímszámokról

- Az itt említett problémák a Riemann-sejtés, a Goldbach-sejtés valamint az ikerprímszám-sejtés. A kérdés máig megválaszolatlan.
- **Riemann-sejtés**: 1859-ben fogalmazódott meg és a Riemann-féle Zéta függvény zérushelyeinek eloszlásával foglalkozik. Sokan (köztük Erdős Pál is) a matematika legfontosabb problémájának tartják. A Hilbert problémák mellett benne van a millenniumi problémákban.
  - A Riemann-féle Zéta-függvény egyváltozós, komplex számokon értelmezett függvény, értelmezési tartománya a teljes komplex számsík, az $s = 1$ eset kivételével.
  - A függvény kapcsolatban áll a prímszámokkal.

3. Probléma a prímszámokról

- A **Goldbach-sejtés** kimondja, hogy
  - Minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként
  - Minden 5-nél nagyobb páratlan szám előáll három prímszám összegeként.
- Csak részeredményekkel rendelkezünk. A sejtést $4 * 10^{18}$-nál kisebb természetes számokra igazolták.
- **Ikerprím-sejtés**nek nevezik azt a sejtést, hogy végtelen sok olyan p prímszám van, amire $p + 2$ is prím. Ezt először Eukleidész fogalmazta meg i.e. 300 körül.

4. A diofantoszi egyenletek megoldhatósága

- A **diofantoszi egyenlet** olyan egész együtthatós, általában többismeretlenes algebrai egyenlet, amelynek megoldásait az egész, ritkábban a természetes számok, illetve racionális számok körében keressük.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

- A legegyszerűbb az elsőfokú diofantoszi egyenlet a :

$$ax + by = c$$

- Ennek az egyenletnek akkor és csak akkor van egész számokból álló megoldása, ha az ismeretlenek együtthatóinak legnagyobb közös osztója a jobb oldalra írt állandónak is az osztója.

4. A diofantoszi egyenletek megoldhatósága

- A probléma megfogalmazásakor a pozitív megoldást tűnt valószínűnek.
- Az algoritmus fogalma a harmincas években lett precízen definiálva. Az ötvenes években számos problémaseregről mutatták ki az algoritmikus megoldhatatlanságot.
- Fibonacci-számokkal kapcsolatos reprezentációs feladatra redukálták, amit Jurij Matyijaszevics 1970-ben bebizonyított. Algoritmikusan többváltozós diofansztoszi egyenletek megoldhatatlanok (megállási feltétel).
- Egyváltozós egyenletekre van algoritmus.

5. Metamatematikai bizonyítások

- **Metamatematika**: modern (19. század utáni) matematikai, matematikafilozófiai, illetve filozófiai publikációkban különféle, egymással rokonságban lévő – de nem mindenhol ugyanabban az értelemben használt – kifejezés.
- Ezt a kérdést Hilbert hagyatékában találták.
- Hogyan lehet megtudni egy bebizonyításról, hogy az a legegyszerűbb bizonyítás-e? Ehhez kellenek kritériumok és bizonyítások.

További problémák

A probléma neve	Megoldás	Megoldás ideje
A kontinuumhipotézis	Gödel, Cohen	1940, 1963
A számelmélet axiómarendszerének ellentmondás mentessége	Gerhard Gentzen	1936 (?)
Poliéderek átdarabolhatósága	Max Dehn	1900
A projektív metrikák meghatározása	-	-
A Lie-csoportok felépítése a differenciálhatóság felvetése nélkül	Andrew Gleason részleges megoldása	1953
A valószínűségszámítás és a fizika axiomatizálása	-	-
Bizonyos számok transzcendenciája	Alekszandr Oszipovics Gelfond, Theodor Schneider	1934-1935

További problémák

A probléma neve	Megoldás	Megoldás ideje
Problémák a prímszámokról	-	-
Reciprocitási tétel tetszőleges számtestekben	Safarevics részleges megoldása	-
A diofantoszi egyenletek megoldhatósága	Jurij Matyijaszevics	1970
Kvadratikus alakok tetszőleges algebrai együtthatókkal	-	-
A Kronecker-Weber-tétel általánosítása	-	-
Függvények kompozíciója	Vladimir Arnold	1957
Az invariánsok végesen generáltak	Masayosi Nagata	1959

További problémák

A probléma neve	Megoldás	Megoldás ideje
Schubert leszámláló geometriájának megalapozása	-	-
Algebrai görbék és felületek problémái	-	-
Pozitív definit alakok előállítása négyzetösszegként	Emil Artin	1927
Euklideszi terek diszkrét mozgáscsoportjai	Ludwig Bieberbach, Karl Reinhardt, Thomas Callister Hales	1928, 1998
Elliptikus differenciálegyenletek megoldásai	Ivan Petrovszkij	?
A variációs probléma megoldhatósága	?	?

További problémák

A probléma neve	Megoldás	Megoldás ideje
Előírt monodrómiacsoportú lineáris differenciálegyenlet létezése	Andrej Bolibruch	1994
Analitikus relációkkal meghatározott függvények uniformizációja automorf függvényekkel	-	-
A variációszámítás problémái	-	-