ÁTTEKINTÉS A MÁTRIXOK, A GYÖKVONÁS ÉS A LNKO TÖRTÉNETÉRŐL ÉS ALKALMAZÁSAIRÓL

Böröcz Péter
Stágel Bálint

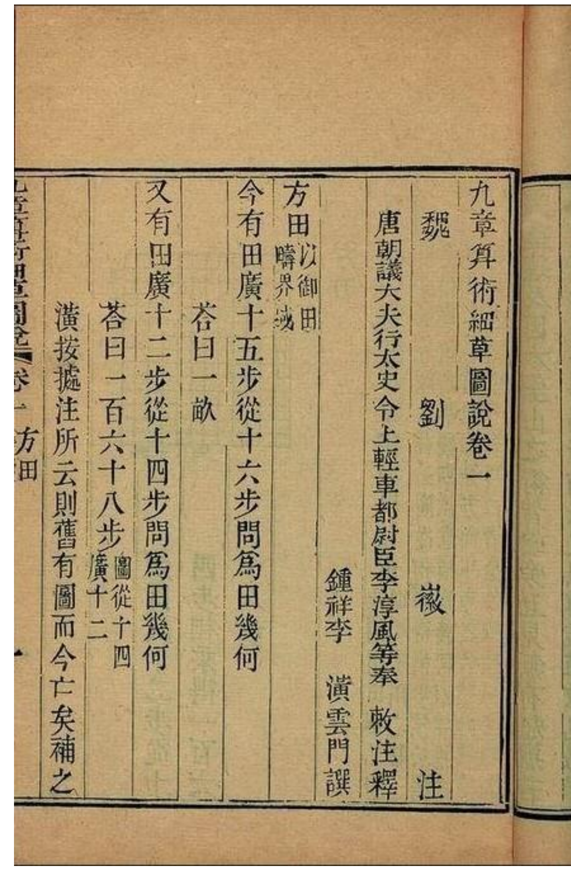
Szemelvények a matematika történetéből – 2015. 11. 26.

Tartalom

- Mátrixok
  - Ősmátrixok
  - A determináns és mátrixműveletek
  - Modern mátrixok
- Gyökvonás
  - Kialakulása
  - Newtoni módszer
- LNKO
  - Euklideszi algoritmus

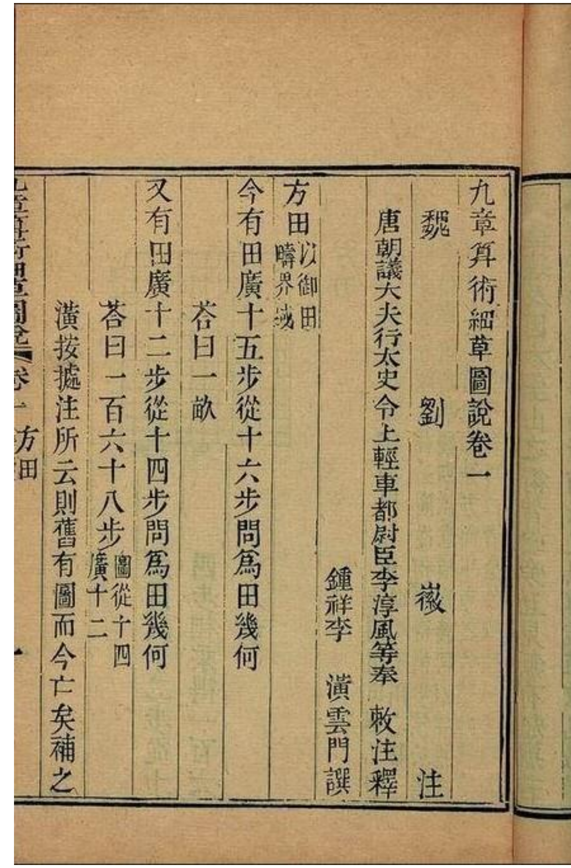
九章算术

- **盈不足章**
  - 是現存最早的**中國古代**数学著作之
  - 双设法的问题
  - 對中國傳統**數學的**發展有了深遠的影響


九章算術細草圖說卷一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋
鍾祥李 潢雲門譔
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
荅曰一百六十八步 圖從十四廣十二
潢按撫注所云則舊有圖而今亡矣補之

九章算术

- **盈不足章**
  - 是現存最早的**中國古代**数学著作之
  - 双设法的问题
  - 對中國傳統**數學的**發展有了深遠的影響
- Kínai matematika
  - “Kilenc fejezet a matematika művészetéről.”
  - II. századi matematikai gyűjtemény


九章算術細草圖說卷一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋
鍾祥李 潢雲門譔
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
荅曰一百六十八步 圖從十四廣十二
潢按據注所云則舊有圖而今亡矣補之

Kínai elimináció

Kínai elimináció

Gabona minősége	Bal oszlop	Középső oszlop	Jobb oszlop
Kiváló	1	2	3
Jó	2	3	2
Szörnyű	3	1	1
Érték	29	38	43

Kínai elimináció

Gabona minősége	Bal oszlop	Középső oszlop	Jobb oszlop
Kiváló	0	0	3
Jó	0	5	2
Szörnyű	36	1	1
Érték	108	28	43

Determináns

- Cardan – 2x2-es mátrixok (1545)

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Determináns

- Cardan – 2x2-es mátrixok (1545)

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

- Leibniz – *n*x*n*-es mátrixok (1683)

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma_i}$$

Determináns

- Cardan – 2x2-es mátrixok (1545)

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

- Leibniz – *n*x*n*-es mátrixok (1683)

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma_i}$$

- Cramer-szabály (1750)

$$Ax = b, \qquad x_i = \frac{\det(A)}{\det(A_i)}$$

Determináns

- Gauss-elimináció (1801)

Determináns

- Gauss-elimináció (1801)
- Cauchy-Binet formula (1812)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

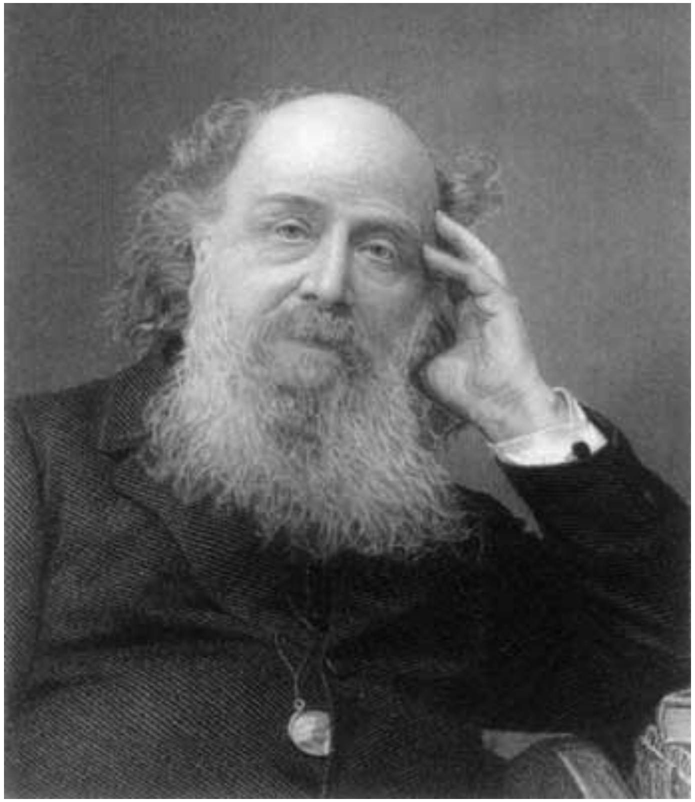
Determináns

- Gauss-elimináció (1801)
- Cauchy-Binet formula (1812)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

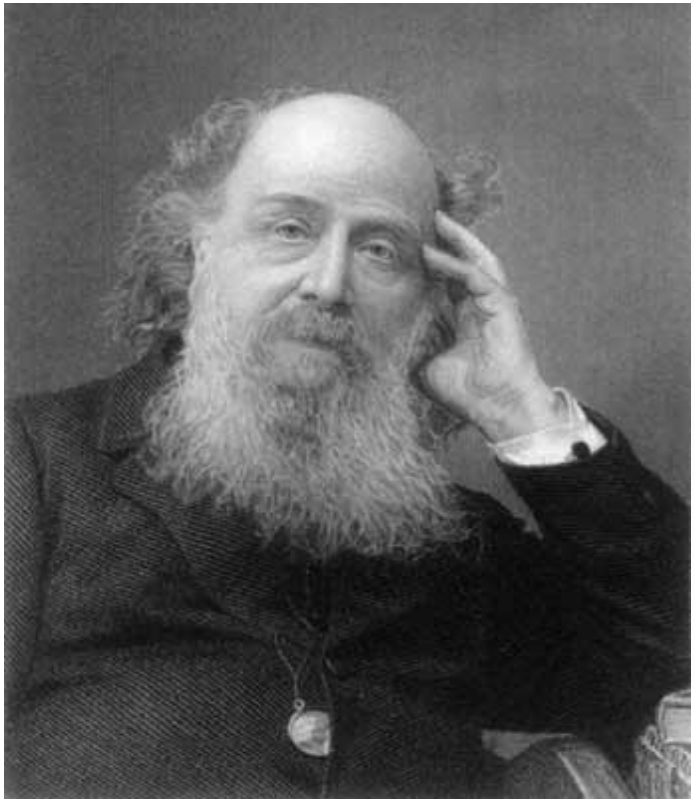
- Grassmann – lineáris algebra (1844)
  - N-dimenziós vektortér
  - Paralelogramma-terület számítása determinánssal

Mátrix elnevezés



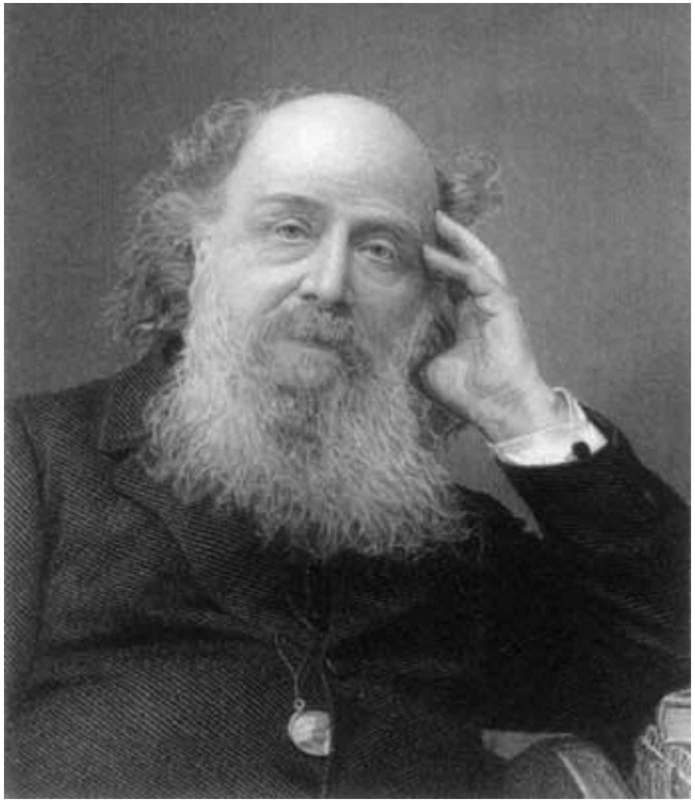
~1850 - James Joseph Sylvester

Mátrix elnevezés



~1850 - James Joseph Sylvester

Mátrix elnevezés



~1850 - James Joseph Sylvester

Mátrixalgebra

- Arthur Cayley – mátrixalgebra (1858)
  - ***Mátrixok*** jelölése
  - Mátrixműveletek rendszerezése

Mátrixalgebra

- Arthur Cayley – mátrixalgebra (1858)
  - ***Mátrixok*** jelölése
  - Mátrixműveletek rendszerezése
- Giuseppe Peano – absztrakt vektorterek (1888)

$$\int \left[af(\theta) + bg(\theta) \right] d\theta = a \int f(\theta) d\theta + b \int g(\theta) d\theta$$

$$(A^{abc}\theta_a\eta_b\psi_c)^4 = \det(A)(\theta_1)^2(\theta_2)^2(\eta_1)^2(\eta_2)^2(\psi_1)^2(\psi_2)^2$$

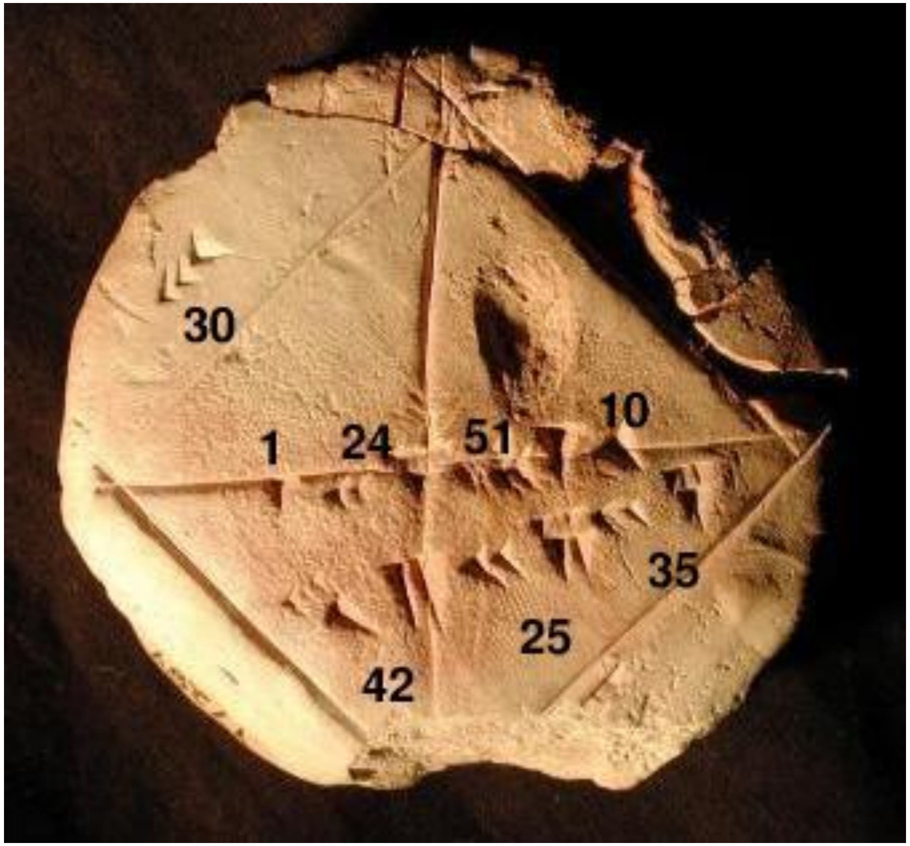
$$|f|_p := (\int_\Omega |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$$

Ritkás mátrixok

$$\begin{pmatrix}
1.0 & 0 & 5.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 9.0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 8.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.0
\end{pmatrix}$$

Gyökvonás

- Babilon Kr.e. 1800-1600
- 60-as számrendszer
- Az oldal 30 egységnyi
- Az átlónál látható szám:
- 1.41421296, a pontos érték:
- $\sqrt{2} = 1.41421356$
- Az átló hossza:
- $42\ 25\ 35 = 30\sqrt{2}$



Gyökvonás

- Egyiptom Kr.e. 1650 körül
  - fordított arányossági módszer
- India Kr.e. 800-500 között
  - közelítések $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ értékének meghatározására
  - $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3*4} - \frac{1}{3*4*34} = \frac{577}{408} \approx 1.414216$
- Ókori görögök Kr.e. 380 körül
  - pozitív egészek gyöke irracionális, ha nem négyzetszám. – Theaeteus
  - egységnyi oldalú négyzet átlója $\sqrt{2}$: (Hippasus, Pythagoras elődje)

Gyökvonás

- Kína Kr.e. 202-186
  - négyzetgyök közelítése (excess and deficiency method)
- India a IX. században
  - Mahavira: Negatív számoknak nincs négyzetgyöke.
- Jelölés:
  - Regiomontanus XV.sz. írott R betűvel jelöli: $\mathscr{R}$
  - $\sqrt{}$ szimbólumot nyomtatásban 1525-ben használták

Gyök számítása

- Logaritmussal: $\sqrt{x} = e^{(\ln x)/2}$ vagy $\sqrt{x} = 10^{(\log_{10} x)/2}$
- $\sqrt{a}$ egyenlőséggel kifejezve: $f(x) = x^2 - a = 0$
- Számológépekben a Newtoni módszert alkalmazzák leggyakrabban:
  - az f valós függvény gyökeit keressük
  - kezdőérték legyen x_0
  - $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ egyre jobb közelítés
  - $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$

Legnagyobb közös osztó(lnko)

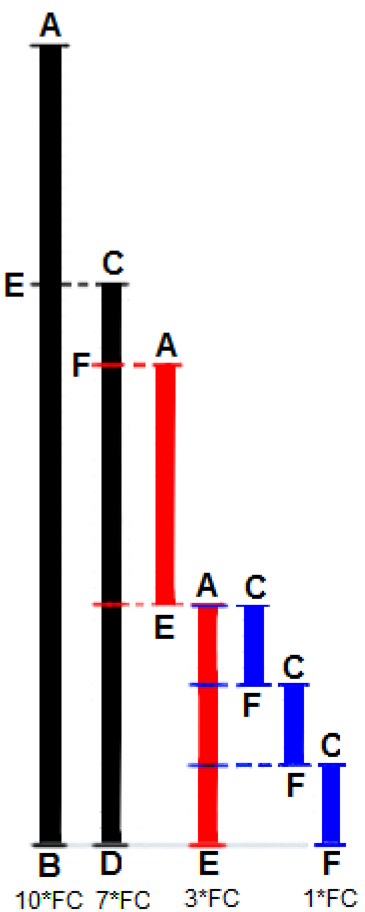
- Jelölések:
  - lnko(a, b)
  - gcd(a, b) – greatest common divisor
  - (a, b)
- Meghatározási módszerek
  - prím felbontás alapján → csak egészekre
  - bináris módszer
  - Euklideszi algoritmus Kr.e. 300 körül

Lnko - Euklideszi algoritmus

- Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^+$ számokra létezik-e lnko(a, b)?
  - ha igen, akkor a és b összemérhető
- Az lnko ekvivalens:
  - $a > b$ esetén $(a - b, b)$
  - $a < b$ esetén $(a, b - a)$
- Az egyik legrégebbi numerikus algoritmus
- Törtek egyszerűsítésére is használják
- Számelmélet és kriptográfiai alkalmazások
  - nagy számok faktorizálása

Lnko - Euklideszi algoritmus

- Ha $a \gg b$, akkor sok kivonást tartalmaz
- Gabriel Lame 1844
  - $lnko(\frac{a}{b}, b)$
  - felső korlát: számjegyek ötszöröse
- lnko(1071, 462)
  - $1071 = 2 * 462 + 147$
  - $462 = 3 * 147 + 21$
  - $147 = 7 * 21 + 0$



Euclid's example

Köszönjük a figyelmet!

A publikáció Neo, Trinity, Morpheus, Smith ügynök és Zion társfinanszírozása által biztosított forrásból a TÁMOP-24.6.01.C-11/1 azonosítójú “Széleskörű tényfeltáráson alapuló ismeretterjesztő előadás készítése a mesterséges intelligencia alkotta digitális világról” című projekt támogatásával jött létre.