RegSzingTetel.doc, 2019-01-03

A Reguláris és Szinguláris Tételek

a) "Reguláris" tétel

Tetszőleges $\underline{\underline{A}}$€$R^{nxn}$ **négyzetes** mátrixra az alábbiak ekvivalensek (egyszerre teljesülnek):

1) *az* $\underline{\underline{A}}$ *mátrix* sor*vektorai lineárisan függetlenek*,
2) *az* $\underline{\underline{A}}$ *mátrix* oszlop*vektorai lineárisan függetlenek,*
3) $r(\underline{\underline{A}})=n$ (*rangja = mérete*),
4) $\underline{\underline{A}}$ *invertálható* (van $\underline{\underline{A}}^{-1}$€$R^{nxn}$ *amelyre* $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}}^{-1}=\underline{\underline{E}}$),
5) $\underline{\underline{A}}$ nem *nullosztó* ($\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{0}}$ *esetén* $\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{0}}$),
6) *minden* $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{x}=\underline{b}$ *lineáris egyenletrendszernek* pontosan *egy megoldása van*,
7) *az* $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{x}=\underline{0}$ *homogén lineáris egyenletrendszernek* csak a triviális $\underline{x}=\underline{0}$ *megoldása van*,
8) $\det(\underline{\underline{A}})$#0 , *azaz a mátrix determinánsa* nem 0, $:=^{DEF}$ $\underline{\underline{A}}$ **reguláris**
9) *az* $\underline{\underline{A}}$ *mátrix által meghatározott* $\mathcal{A}:R^n \rightarrow R^n$ ($\underline{x}\rightarrow\underline{\underline{A}}\cdot\underline{x}$) *lineáris leképezés injektív (egy-egy-értelmű)*,
10) $Ker(\mathcal{A})=\{\underline{0}\}$ ($\mathcal{A}$ *magtere* csak a $\underline{0}$),
11) $\mathcal{A}$ *szürjektív* (*ráképezés*),
12) $\mathcal{A}$ *bijektív* (*kölcsönösen egyértelmű*),
13) $\mathcal{A}$ *invertálható* (van $\mathcal{A}^{-1}$ amelyre $\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^{-1}=\mathfrak{I}d$).
14) $\underline{\underline{A}}$ - *nak* 0 nem *sajátértéke*. □

b) "Szinguláris" tétel

Tetszőleges $\underline{\underline{A}}$€$R^{nxn}$ **négyzetes** mátrixra az alábbiak ekvivalensek (egyszerre teljesülnek):

1) *az* $\underline{\underline{A}}$ *mátrix* sor*vektorai lineárisan* összefüggőek,
2) *az* $\underline{\underline{A}}$ *mátrix* oszlop*vektorai lineárisan* összefüggőek,
3) $r(\underline{\underline{A}})<n$ (*rangja < mérete*),
4) $\underline{\underline{A}}$ nem *invertálható* (nincs *olyan* $\underline{\underline{A}}^{-1}$€$R^{nxn}$ *amelyre* $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}}^{-1}=\underline{\underline{E}}$),
5) $\underline{\underline{A}}$ nullosztó (van olyan $\underline{\underline{B}}\neq\underline{\underline{0}}$ *amelyre* $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{0}}$),
6) *minden* $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{x}=\underline{b}$ *lineáris egyenletrendszernek* vagy nincs vagy végtelen sok *megoldása van*,
7) *az* $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{x}=\underline{0}$ *homogén lineáris egyenletrendszernek* nem csak a triviális $\underline{x}=\underline{0}$ *megoldása van*,
8) $\det(\underline{\underline{A}})=0$, *azaz a mátrix determinánsa* 0, $:=^{DEF}$ $\underline{\underline{A}}$ **szinguláris**
9) *az* $\underline{\underline{A}}$ *mátrix által meghatározott* $\mathcal{A}:R^n \rightarrow R^n$ ($\underline{x}\rightarrow\underline{\underline{A}}\cdot\underline{x}$) *lineáris leképezés* nem *injektív (egy-egy-értelmű)*,
10) $Ker(\mathcal{A})\neq\{\underline{0}\}$ ($\mathcal{A}$ *magtere* nem csak a $\underline{0}$),
11) $\mathcal{A}$ nem *szürjektív* (*ráképezés*),
12) $\mathcal{A}$ nem *bijektív* (*kölcsönösen egyértelmű*),
13) $\mathcal{A}$ nem *invertálható* (nincs olyan $\mathcal{A}^{-1}$ amelyre $\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^{-1}=\mathfrak{I}d$).
14) $\underline{\underline{A}}$ - *nak* 0 *sajátértéke*. □

c) Tétel: (csak vájtfülűeknek)

Tetszőleges $\underline{\underline{A}}$€$R^{nxm}$ *mátrixra (leképezésre) az alábbiak ekvivalensek:*

(i) $\underline{\underline{A}}$ *injekció,*
(ii) $\underline{\underline{A}}$ *-nak létezik balinverze,*
(iii) $\underline{\underline{A}}$ *balreguláris,*
(iv) $\underline{\underline{A}}$ *nem baloldali nullosztó.* □

d) Tétel: (csak vájtfülűeknek)

Tetszőleges $\underline{\underline{A}}$€$R^{nxm}$ *mátrixra (leképezésre) az alábbiak ekvivalensek:*

(i) $\underline{\underline{A}}$ *szürjekció,*
(ii) $\underline{\underline{A}}$ *-nak létezik jobbinverze,*
(iii) $\underline{\underline{A}}$ *jobbreguláris,*
(iv) $\underline{\underline{A}}$ *nem jobboldali nullosztó.* □

III.) Algebra Alaptétele(i) és következményei:

1) Algebra Alaptétele (valós változat)**:** *Tetszőleges* valós *együtthatójú polinom lényegében egyértelmű módon* (sorrendtől és konstans szorzóktól eltekintve) *felbontható legfeljebb másodfokú valós együtthatójú polinomok szorzatára.* □

Következményei:
a) Az irreducibilis (szorzattá nem bontható) *valós* polinomok első vagy (legfeljebb) másodfokúak, és azok közül is csak azok, amelyek diszkriminánsa $D<0$.
b) Minden *páratlan* fokú (valós együtthatójú) egyenletnek van (legalább egy) *valós* gyöke. □

2) Algebra Alaptétele (komplex változat)**:** Tetszőleges *(valós vagy komplex) együtthatójú polinom lényegében egyértelmű módon* (sorrendtől és konstans szorzóktól eltekintve) *felbontható* elsőfokú *komplex (vagy valós) együtthatójú polinomok szorzatára.* □

Következményei:
c) Az irreducibilis (szorzattá nem bontható) *komplex* polinomok csak elsőfokúak lehetnek.
d) *Minden* (valós vagy komplex együtthatójú) egyenletnek pontosan annyi komplex (esetleg valós) gyöke van (multiplicitással számolva), mint amennyi a fokszáma. □