Szalkai Balázs, Szalkai István :

Kártyajátékok és bűvésztrükkök

Közismert, hogy nagyon sok bűvésztrükk matematikai alapokon nyugszik, a kártya- és egyéb játékok matematikai elemzéséről nem is szólva. Nem csak a trükk magyarázata igényel matematikát, hanem külön kategória az *automatikus* mutatványok műfaja: a bűvésznek semmilyen ügyességre nincs szüksége: a kártyalapok a matematika törvényeinek segítségével önműködően szórakoztatják a közönséget.

A cikk első részében néhány, kevésbé közismert játékot és eredményt mutatunk be, a második részben röviden elemezzük matematikai hátterüket, sok általánosítást is "felfedezünk". Ezek az ötletek a tananyag színesítésén túl logikus gondolkodásra, a tanultak elmélyítésére is használhatóak.

Rodolfo (*Gács* [szül.Gross] *Rezső*) bűvészkönyveiben is sok további automatikus mutatványt és magyarázatát találhatunk, ajánljuk még *Csajbók Bence* [CsB] és *Deme-Farkas Rita* [DFR] cikkeit is.

1. A mutatványok

Maria Prope Vivet Mutuo

Ezeket a varázsszavakat és a mutatványt a 90 éves *Mikó Ernő* nagypapától hallottuk. Sajnos csak "francia" kártyával lehet előadni, "magyar" kártyával nem.

Leteszünk az asztalra 20 kártyalapot: 10 figurát, mindegyikből kettőt-kettőt (a szín most nem érdekes), négy sorban és öt oszlopban. Egy jelentkezőt megkérünk, hogy válasszon ki egy neki tetsző figurát (pl. Király), de ne árulja el hogy mit választott. Csak annyit kérdezünk, hogy melyik sorban vagy sorokban, szerepel ez a figura. Mi *azonnal* rávágjuk, hogy melyik figurát választotta.

A 10 figura két-két példányban nem olyan sok, egy vagy két sorban meg lehet könnyen találni az azonosakat egy jó fejű bűvésznek, mondhatja bárki. Mi azonban nem akárhogyan tettük le a lapokat az asztalra, hanem matematikai meggondolás (varázsszavak) után:

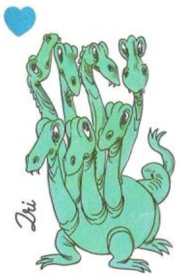
```
M A R I A
P R O P E
V I V E T
M U T U O
```

Az asztalra mindegyik betű helyett egy neki megfelelő figurát teszünk. A táblázat úgy van megszerkesztve, hogy mindegyik figura *egyértelműen* kitalálható legyen a néző által megmutatott sorból vagy sorokból: az 1. sorban *csak* az **A** betű szerepel kétszer, hasonlóan a 2., 3. illetve 4. sorokban csak a **P**, **V** illetve az **U** betűk szerepelnek kétszer. Az 1. és 2. sorban *csak* az **R** betű közös, hasonlóan csak az **I** betű szerepel az 1.és 3. sorban, és így végig mind a 10 figurán. A varázsigék csak a táblázat könnyebb megjegyzéséhez kellenek.

Teljesen mindegy, hogy melyik betűnek nálunk melyik figura felel meg, csak az a fontos, hogy **1 betű = 1 figura** legyen a a megfeleltetés! Például:

```
E = kettes          O = nyolcas      P = Pubi(fiú)
V = ötös  (V)       I = kilences     M = dáma(Mária)
U = hatus(hatos)    T = Tízes        R = Rex(király)     A = Ász
```

Párok



Gyermekkorunkban sokszor játszottunk "párosítós kártyával": mindegyik lapnak van párja. Például a cseresznye párja a meggy, macilánynak a macifiú, sárkánynak a boszorkány, stb. Mindenkinek osztunk öt lapot, majd egyesével húzunk a pakliból. Ha a pakli elfogyott, egymástól (utána következőtől) húzunk. Eközben, akinek kezében van egy pár mindkét kártyája, azt a párt leteszi maga elé, és az győz, aki több párt gyűjtött.

A Fekete Pétert általában kivettük, hogy bőgés ne legyen. Ha csak kettő személy játszik, akkor érdekes megfigyelést tehetünk:

1. Tétel: *A párosítós kártyajátékban, ha a lapok száma osztható néggyel és csak ketten játszanak, akkor a végeredmény mindig döntetlen.*
A $4k$ számú lap feltevése nyilvánvalóan szükséges, a bizonyítást a cikk második részében ismertetjük.

Középen

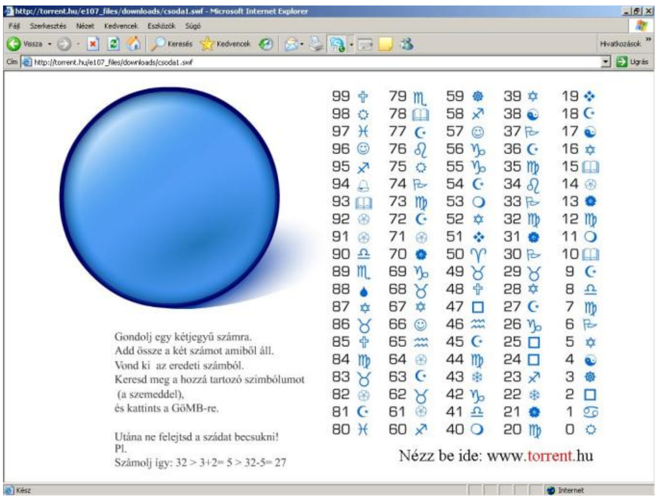
Előveszek 21 akármilyen (különböző) kártyalapot. Megmutatom a lapokat a nézőknek, egyikük választ egyet, természetesen nem mondja meg nekem. A lapokat egyesével, színükkel felfelé rakom le az asztalra három csomagba: *balra, jobbra, középre*, balra, jobbra, középre, és így tovább. A nézőnek csak annyit kell mondania, hogy melyik csomagba került a kiválasztott lapja. Ezután egymásra helyezem a három csomagot: a néző lapját tartalmazó paklit teszem középre. Ezt a szétosztást és összerakást még kétszer megismétlem! Végül egyszerűen kiterítem a 21 kártyát színükkel felfelé egy sorba, a néző által megjegyzett lap pedig mindig a csomag közepén, a 11. helyen lesz!

Csodagömb

Interneten hamar megtaláljuk dédapáink kedvenc játékának önműködő változatát: elég a "Csodagömb" szóra keresnünk:

" *Gondolj egy kétjegyű számra. Add össze a két számjegyet amiből áll. Vond ki az eredeti számból. Például számolj így*: 32 => 3+2 = 5 => 32-5 = **27**. *Keresd meg a hozzá tartozó szimbólumot (a szemeddel), és kattints a GÖMB -re. Utána ne felejtsd a szádat becsukni!* "

... és a magyarázatot a cikk végén elolvasni ... !



Négy kartonpapír

Megkérem játékostársamat, hogy gondoljon egy egész számra 0-tól 80-ig, de ne mondja meg. Ezután odaadom neki az alábbi négy kartonpapírt, és megkérdezem, hogy melyiken *milyen színnel* találta meg a választott számot: **feketével**, kékkel vagy pirossal. (Mivel a cikk fekete-fehér nyomású, ezért a kék számokat egyszer, a pirosakat kétszer alá is húztuk.) Ezután egy pillanat alatt kitalálom a választott számot, pedig a nagyobb hatás érdekében a számokat össze-vissza is lehet a papírokra írni, ternészetesen a színkódok megtartásával.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80			

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80			

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80			

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62
63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80			

A gyors válasz titkát már kisdiákok is könnyen megérthetik: *mindegyik lapon a mondott színnel megegyező* **legkisebb** *számokat kell megkeresni, és ezen számok összege éppen a társunk által gondolt szám*!

A hatást még fokozhatjuk, ha a fekete számokat nem írjuk fel a papírokra, és csak azokat a papírokat kérjük vissza, amelyeken a választott szám szerepel. A magyarázaton túl további általánosításokat találunk a cikk második részében.

Négy és az ötödik

Az 52 lapos csomagból egy néző kiválaszt tetszőleges ötöt és átadja nekem, a maradék kártyákat félreteszi. Én a kapott öt kártya közül egyet zsebre teszek, a másik négyet pedig egy borítékba. A leragasztott borítékot egy másik néző átviszi a szomszéd szobában várakozó társamnak, aki kibontja a borítékot, és megmondja, melyik volt az ötödik kártya amit én zsebre tettem. Hogyan? (A feladat és megoldása van *Lint* és *Wilson* [LW] könyvéből való, Hujter Mihály barátom hívta fel rá figyelmemet.)

Varázsdiók

Jelen folyóirat hasábjain [SzI97] -ben szintén egy mutatványt és általánosításait elemeztük (többek között), különböző alapú számrendszerek felhasználásával. A cikkben felvetett kérdés máig is megoldatlan!

2. Elemzések és megoldások

Előrebocsájtjuk a több évszázados tapasztalatot: *Ha egy trükk megfejtését ismerjük, akkor már nem is szórakoztat maga a trükk* ! Így sok kellemes baráti, családi vagy művész estét lehet elrontani! Tehát kérjük kedves Olvasóinkat: társaságban ne akarják mindenáron "lelőni a poént" !

Maria Prope Vivet Mutuo

Matematikailag mi működteti a táblázatot? Négy olyan figura lehet, amely egy-egy sorban van egyedül kétszer, továbbá két-két sor közös eleme lehet $\binom{4}{2} = 6$ figura, így jön ki összesen a 4+6=10 -féle figura és a 10×2=20 lap.

Általánosítás: *El lehet-e helyezni* n *sor mindegyikében* m *kártyát úgy, hogy mindegyik figurából* 2-2 *van az asztalon (tehát* n *vagy* m *páros), és mindegyik figurát* egyértelműen *jellemez az a* két *sor, amelyekben ennek a figurának a két lapja található?*
(Most a csak egy-egy sorban található figurákkal nem foglalkozunk.)
A figurák száma $\frac{nm}{2}$, a sor-párok száma $\binom{n}{2}$, tehát a feltétel

(0) $$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{nm}{2}$$

vagyis

$$n\text{-}1 \geq m .$$

Láthatjuk tehát, hogy *mennyiségileg* semmi akadálya nincs annak, hogy n sorban $m = n$-1 lap a követelménynek eleget tegyen. De valóban el lehet-e helyezni a lapokat az asztalon a kívánt tulajdonsággal?

Szerencsére igen. Soroljuk fel mindegyik sorban a *többi* sor sorszámát, de az i -edik sorban a j -edik sorszám helyett az $\{i,j\}$ kételemű halmazt írjuk ($1 \leq i \neq j \leq n$). Mindegyik ilyen kételemű halmazt pontosan kétszer írtuk be a táblázatba: az i -edik és a j -edik sorokban ($i \neq j$). Végül a (0) és $m = n$-1 összefüggések alapján $nm/2$ féle figurából (az alábbi ábrán **a,b,c** betűk) két-két példányt éppen le tudunk tenni a nekik megfelelő kételemű halmazok helyére.

Egy kis odafigyeléssel még egyre bővülő táblázatokat is készíthetünk: az nm méretű tábla részhalmaza (*kezdőszelete*) lehet az $n'm'$ méretűnek, a kártyák áthelyezése nélkül.

```
  |                        .
1 | {1,2} {1,3} {1,4} {1,5}
2 | {2,1} {2,3} {2,4} {2,5}
3 | {3,1} {3,2} {3,4} {3,5}
4 | {4,1} {4,2} {4,3} {4,5}
5 | {5,1} {5,2} {5,3} {5,4}
 . . .
```

```
  | 1 2 3 4 .
1 | a b d g
2 | a c e h
3 | b c f i
4 | d e f j
5 | g h i j
```

Már csak titokzatos varázsszavakat kell keresnünk, és esetleg egy sokkal több figurát tartalmazó kártyacsomagot (pl. a SET [DFR]-ben) nagyméretű mutatványunk bemutatásához!

Párok

Az 1.Tétel **bizonyítása**: Tekintsük a játéknak azt a pillanatát, amikor éppen elfogy az asztal közepén levő pakli, és a két játékos ezután már csak egymás kezéből húz. Ekkor mindegyik, még le nem tett kártya párja a másik játékosnál van, emiatt mindkét játékosnál ebben a pillanatban *ugyanannyi* lap van. A játék kezdetén mindketten ugyanannyi lapot kaptak, felváltva ugyanannyit húztak, most ugyanannyi van kezükben, tehát ugyanannyi lapot tettek le az asztalra maguk elé, vagyis már eddig ugyanannyi párt gyűjtöttek. Így az asztalon levő lapok száma 4-gyel osztható. Mivel eredetileg is 4-gyel osztható volt a lapok száma, ezért most a játékosok kezeiben levő lapok száma összesen szintén 4-gyel osztható, fele itt, fele ott.

Ezután a játékosok egymástól húznak felváltva, ezért ugyanannyi párt fognak gyűjteni a játék hátralevő részében is. A játék döntetlen, a Tétel pedig be van bizonyítva!

Középen

Amikor a három kis csomagot legelőször összeszedjük, akkor néző által választott kártya a középső csomagban volt, vagyis az egyesített csomagban a 8. és 14. hely között valahol (akár alulról, akár felülről számolva). A következő "terítéskor" először az előtte levő 7 kártyát két rétegben letesszük, ezután jön a néző kártyája, legfeljebb a 3.rétegben, majd újabb két réteg kártya. Ez azt jelenti, hogy a második összeszedés után kártyánk már biztosan a 10. és 12. hely között bújik meg.

Hasonlóan, a nagy csomag harmadik szétosztásakor már legalább 3-3 réteg kártya van a néző lapja alatt és felett (az asztalon). Tehát a legutolsó összeszedéskor legalább 7+3 kártya kerül a kiválasztott lap alá és fölé, ez pedig csak úgy lehet, hogy a keresett lap *pontosan a* 21. *helyen van*!

A fenti gondolatmenet nagyon jól lehet szemléltetni egy, a többi laptól elütő színű kartonpapírral a választott kártya helyett: menet közben figyelhetjük a lap helyezkedését, mozgását.

A mutatványt szakknyelven úgy magyaráznánk, hogy a választott lap gyorsan "konvergál" (összetart, közelít) a nagy csomag közepére, a 11. helyre.

Lehetséges-e ez a mutatvány tetszőleges *páratlan* számú kártyára is, vagyis:

2.Probléma: *Legyenek* **k** *és* **l** *tetszőleges* páratlan *számok. Vegyünk elő* **kl** *kártyalapot és egyiket jegyezzük meg (de ne vegyük ki a pakliból), legyen ez* **V**. *Ezután* **t** *-szer ismételjük meg a következőt:* *<u>egyesével</u> balról jobbra (ciklikusan) a lapokat szétosztjuk* **k** *kis csomagba, mindegyikbe* **l** *lapot, majd úgy szedjük össze a kis csomagokat, hogy a választott lapot tartalmazót tesszük középre.*

Igaz-e, hogy bármilyen (páratlan) **k** *és* **l** *számokra elég nagy* **t** *után a választott lap a nagy csomagnak* pontosan a közepén *lesz*? *Ha igen, mekkora (a* **k** *és* **l** *számokhoz tartozó)* **t** *legkisebb értéke*?

Megoldás: Legyen $k=2b+1$ és $l=2a+1$. A szétosztásoknál az először letett k lapot nevezzük el első *rétegnek*, a másodszorra (rájuk) tett k lapot második rétegnek, s.í.t., vagyis a k kis csomag l rétegben készült. Jelölje x_i az i -edik szétosztásnál azon rétegek számát, amelyekben a választott kártya biztosan nincs, nyilvánvalóan $x_1=0$.

A megfogalmazott Probléma azzal egyenértékű, hogy valamilyen t egész számra

$$x_t=a ,$$

ugyanis ekkor a kis csomagok összeszedése után **V** (a választott lap) a nagy pakli közepére kerül. Az is könnyen belátható, hogy ha már egyszer **V** középre került, akkor a szétosztást és összeszedést folytatva **V** a közepén marad, mivel k és l is páratlan számok.

Ha az i -edik összeszedésnél **V** -t tartalmazó kis csomagot középsőként szedtük össze, akkor **V** a nagy csomagban legalább a $b\cdot l+x_i+1$ -dik helyre kerül. Így a következő szétosztásnál **V** biztosan nincs $[(b\cdot l+x_i)/k]$ rétegben (egész rész), vagyis, kis átalakítás után:

$$(1)\qquad x_{i+1} \geq \left[\frac{b(2a+1)+x_i}{2b+1}\right] = \left[a+\frac{b-a+x_i}{2b+1}\right] = a+\left[\frac{b-a+x_i}{2b+1}\right] .$$

A továbbikban az alábbi sorozatot fogjuk vizsgálni:

(2) $$x_{i+1} = a + \left[\frac{b-a+x_i}{2b+1}\right].$$

Indukcióval könnyen látható, hogy

(3) $x_i \le a$, $x_i \le x_{i+1}$ és $x_i = a$ esetén $x_{i+1} = a$.

A $b \ge a$ eset könnyű: $x_1=0$ és (1) alapján $x_2=a$ vagyis $t=2$. Tehát a második összeszedés után **V** már biztosan a nagy csomag közepén van! A $b \ge a$ vagyis $k \ge l$ eset azt jelenti, hogy sok kis vékony csomagunk van, pontosabban egy-egy csomagban legfeljebb annyi lap lehet,mint ahány csomagunk van. Ez meglepő lehet például a $k=l=999$ esetben is, vagyis 998001 kártya-lap szétosztásánál elég két összeszedés !

A $b \le a$ esetben t tetszőlegesen nagy lehet, erről egyszerű kísérletekkel, vagy az (1) rekurzió számolgatásával meggyőződhetünk.

Már az sem nyilvánvaló, hogy az (x_i) sorozat *szigorúan* monoton növő.

Vizsgáljuk meg tehát az $x_i = x_{i+1}$ esetet: az

(4) $$x_i = x_{i+1} = a + \left[\frac{b-a+x_i}{2b+1}\right]$$

vagyis az

(5) $$x_i - a = \left[\frac{b-a+x_i}{2b+1}\right]$$

egyenlőséget. Bevezetve az új $c := a\text{-}x_i$ $(0 \le c \le a)$ változót kapjuk:

$$-c = \left[\frac{b-c}{2b+1}\right] \qquad \text{vagyis} \qquad -c \le \frac{b-c}{2b+1} < -c+1$$

ahonnan

$$-c\cdot(2b+1) \le b-c < (-c+1)\cdot(2b+1)$$

azaz

$$-2bc \le b < -2bc + 2b+1 = 2b\cdot(1-c) + 1$$

ami csak akkor teljesülhet, ha $c \le 1$ hiszen $0 \le c \le a$ és $1 \le b$.

A $c=1$ eset vizsgálata helyett elég azt meggondolnunk, hogy milyen feltételek esetén lesz

(6) $x_{i+1} = a$.

Nos, (2) és (3) alapján ez *pontosan akkor* teljesül, ha

(7) $0 \le b - a + x_i = b - c < 1$.

Többek között (7) -ből az is következik, hogy $c=1$ esetén (6) teljesül.

Más szavakkal: az (x_i) sorozat csak akkor nem szigorúan monoton növő, ha $x_i = a$, ekkor ugyanis $x_{i+1} = x_i = a$.

Összefoglalva: a 2.Probléma megoldására a következő tételt kaptuk:

3.Tétel: *A 2.Probléma jelöléseivel:*

i) *Bármely* $\mathbf{k \ge l}$ *esetén* $\mathbf{t}=2$.

ii) *Bármely* $\mathbf{k<l}$ *esetén* $\mathbf{t}$ *létezik, de tetszőlegesen nagy lehet.*

Megjegyzés: **t** nagyságrendjét $x_1=0$ és (1) alapján meg tudjuk becsülni, például $b=1$ esetén $x_2 \approx 2/3a \approx l/3$, és hasonlóan $x_3 \approx 7/9a$, $x_4 \approx 25/27a$, s.í.t.

Csodagömb

Bármelyik számból kivonva számjegyeinek összegét, mindig 9 -cel osztható számot kapunk. Például kétjegyű számoknál: $(10*a+b)-(a+b) = 9*a$. Nézzük meg alaposabban a Csodagömb ábráit: minden 9 -cel osztható számnál *ugyanaz* a jel szerepel (kivéve 0, 90 és 99, hiszen $1 \le a \le 9$ miatt $9 \le 9*a \le 81$), és a gömbre kattintva is ez a jel tűnik elő! Tehát akármelyik számra is gondolunk, mindig *ugyanez* a jel fog előtűnni! Próbáljuk csak ki!

Többjegyű számokra szintén igaz, hogy a számból jegyeinek összegét kivonva 9-cel osztható számot kapunk (házi feladat), de a képernyőre már a háromjegyű számok sem férnek el mind. Esetleg próbálkozhatunk a következő (szakállas) trükkel is: cserélje meg a kétjegyű (vagy akárhányjegyű) szám jegyeinek sorrendjét, és a nagyobbik számból vonjuk ki a kisebbet. Persze megint 9-cel osztható számot kapunk.

Négy kartonpapír

Vegyük észre, hogy az első táblázatban egy fekete - egy kék - egy piros szám váltogatja egymást, tehát hármasával ismétlődnek a színek. A második táblázatban három-három egyszínű követi egymást, vagyis kilenc az ismétlődés hossza, a harmadik táblázatban kilenc-kilenc, a negyedikben pedig 27-27 azonos szín követi egymást. A felsorolt számok éppen 3 hatványai, ezek szerint a fekete-kék-piros színek pedig a hármas számrendszer (megfelelő helyen álló) *számjegyei*.

Összefoglalva: 0-tól 80-ig a számokat *hármas* számrendszerben írjuk fel (kódoljuk), majd az x számot az i-edik papírlapon fekete, kék vagy piros színnel aszerint színezünk, hogy x -nek a hármas számrendszerbeli alakjában az i -edik helyiértéken levő számjegye 0, 1 vagy 2. Ebből az is következik, hogy az i-edik papírlapon a legelső fekete, kék illetve piros szám éppen 0 , $1 \cdot 3^i$ illetve $2 \cdot 3^i$.

Általánosítás: A mutatványt nagyon könnyen **általánosíthatjuk** 80-nál több számra illetve akárhány színre, azaz bármely alapú számrendszerre, például az alábbiak szerint: Tetszőleges $k \ge 2$ és $d \ge 1$ esetén 0 -tól k^d-1 -ig tudjuk felírni (és kitalálni) a számokat d papírlapra k színnel: a számokat csak k alapú számrendszerben kell felírnunk, és bármely $x<k^d$ számot az i-edik papírlapon ($0 \le i \le d$-1) a j -edik színnel jelölünk ($0 \le j \le k$-1) pontosan akkor, ha x -nek k -alapú számrendszerbeli alakjában a k^i értékhez tartozó számjegye éppen j . A szám gyors kitalálása változatlan: *mindegyik lapon a mondott színnel megegyező* **legkisebb** *számokat kell megkeresni, és ezen számokat összeadni.*

Négy és az ötödik

Az eredeti feladat ugyan 52 -lapos kártyacsomagról szól, de megpróbáljuk kideríteni az igazságot N lap esetén. (Az összes alábbi megállapítás minden, **5** és **124** *közötti* N számra érvényes lesz.)

Nyilván nem elég az $N \le C_N^4 = \binom{N}{4}$ egyenlőtlenségre gondolnunk, hiszen nem a zsebretett kártya után választok én szabadon négy lapot, hanem csak öt (akármilyen) lapot kapok és abból lehet egyet kivennem, pont. Az $\binom{N}{5} > \binom{N}{4}$ egyenlőtlenség most éppen zavaró.

A megoldás kulcsa az, hogy a megmaradt négy lap *sorrendje* is lényeges a borítékban: így a

(8) $$C_N^5 = \binom{N}{5} \le V_N^4 = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3)$$

egyenlőtlenséget fogjuk kihasználni, ami $5 \le N \le 124$ esetén teljesül. **Vigyázat**: a fenti egyenlőtleneg még nem elég, mert csak az öt kapott lappal gazdálkodhatunk!

Tehát olyan *injektív* $f: X \to Y$ azaz

(9) $$f: P_5(N) \to R_4(N)$$

függvényt kell keresnünk, amelyre tetszőleges $S \in X = P_5(N)$ és $f(S) = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in X = R_4(N)$ esetén

(10) $$\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \subseteq S,$$

ahol $X = P_5(N)$ az N -elemű csomag (halmaz) összes 5-elemű részhalmazainak halmaza és $Y = R_4(N)$ az N -elemű halmaz összes 4 (különböző) -elemű rendezett négyeseinek halmaza. ($|X| \leq |Y|$ és $5 \leq N \leq 124$ nyilván ekvivalensek.)

Tekintsük most azt a páros (kétpólusú) **G**=(V,E) gráfot, melynek csúcsai $V = X \cup Y$ és legyenek $S \in X$ és $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in Y$ éllel pontosan akkor összekötve, ha $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \subseteq S$.

Gráfelméleti nyelven az f injektív függvény egy **M** *teljes párosítást* (complete matcing) adna, X -ből Y -ba (vagyis M minden X -beli csúcsot tartalmaz), egy ilyesmit kell keresnünk.

G gráfunk **semiregular** (*félig szabályos*), ami azt jelenti, hogy minden X -beli csúcs fokszáma d_1 és minden Y -beli csúcs fokszáma d_2 valamilyen d_1, d_2 rögzített nemnulla számokra. Mivel $d_1 \geq d_2$, ezért G -ben *létezik* teljes párosítás X -ből Y -ba.

A fenti gondolatmenet alapján megpróbálhatjuk még jobban általánosítani a "trükköt" : az N elemű csomagból k lapot kapunk, melyből l lapot tehetünk borítékba. Ezen gondolkodjon el kicsit az Olvasó, talán egy későbbi írásunkban mi is visszatérünk erre a problémára.

Most már csak egy *használható* (fejben számolható) párosítást, vagyis "jelbeszédet" kellene kitalálnunk, partnerünkkel megbeszélnünk! Reméljük, nem vettük el teljesen az Olvasó kedvét az eddigi hasznos gráfelméleti fejtegetéssel: az alábbi módszer megértéséhez szinte alig van szükségünk matematikai tudásra.

Az öt kártya között van legalább kettő azonos színű. Az egyik ilyen színből egy *nagyobb* értékűt tegyük zsebre, az utána közvetlenül kisebbet pedig a borítékban legfelülre. Ebből már tudni fogja partnerünk, hogy milyen *színű* lap van zsebünkben, ami a borítékban levőnél nagyobb. De mennyivel? Ezt a maradék három lappal fogjuk jelezni. Három lapot mindössze csak 3!=6 féle sorrendben tudunk a borítékba helyezni, ezért még egy "trükkre" van szükségünk. A (szín nélküli) figurák *nagyságát* nem a szokásos 2,3,4,...,10,J,Q,K,A /vége/ sorrendben értjük, hanem rendezzük el ezt a 13 figurát az asztalon *körben*, mondjuk az óramutató járásával megegyező irányban ("modulo 13"), és bármely két figura közül mondjuk azt **kisebbnek**, amelyiktől a másikig rövidebb úton el tudunk jutni, az óramutató járásával megegyező irányban! Ez a távolság legfeljebb hat, és ezt a számot kell a maradék három lap sorrendjével jeleznünk partnerünknek. Matematikusoknak ez már nem nehéz: a mutatvány előtt az egész kártyacsomag lapjait rendezzük partnerünkkel egyetértésben (gondolatban) 1 -től N -ig egyetlen sorba, például: ♥2,3,...,Q,K,A,♦2,3,...,Q, K,A,♠2,3,...,Q,K,A,♣2,3,...,Q,K,A. Ezután bármely három lap most bemutatott eredeti sorrendje jelentse az 1 számot, és a másik öt sorrendnek (permutációnak) is feleltessünk meg a 2,3,4,5,6 számok valamelyikét, például tetszés szerint. A borítékba tett három másik lappal így tudjuk közölni partnerünkkel a szükséges 1 és 6 közötti számot!

Például, ha a ♦3, ♦5, ♦Q, ♠3, ♠7 kártyákat kaptuk, akkor például ♦3 és ♠7 közül bármelyiket zsebre tehetjük, ezek "nagyobb" kártyák az óramutató szerint. Bizony: ♦3 távolsága ♦Q -tól kezdve csak 4. A zsebbe tett lap színével megegyező, nála "kisebb" értékű lapot ne feledjük a borítékban legfelülre tenni. Ha például ♦3 -t tettük zsebbe, akkor a borítékba ♦Q kerül, és a 4 -nek megfelelő sorrendben (permutációban) tegyük a maradék ♦5, ♠3, ♠7 lapokat, ♦Q alá.

Hókuszpókusz

Végül eláruljuk ennek a varázsigének az eredetét. Kedves barátom, Tamás atya fedte fel előttem nem olyan régen ennek a szónak az eredetét. Alig száz évvel ezelőtt ugyanis minden mise latin nyelven folyt, és *átváltoztatáskor*, az ostya felmutatásakor a pap (néha kicsit halkan) idézte: "*Hoc est corpus meus!*" (=Íme, az én testem), amit nem nehéz hókuszpókusz-nak érteni, főleg nagyotthalló nénikék és bácsikák esetében.

Irodalom

[CsB] **Csajbók Bence:** *Egy kártyatrükk és ami mögötte van*, KöMaL 2010. május, 258-263.old.

[DFR] **Deme-Farkas Rita:** *Variációk a SET témájára*, KöMaL 2008/2, február, 71-75.old. http://www.komal.hu/cikkek/2008-02/SET.h.shtml , http://www.setgame.com .

[LW] van **Lint**,J.H., **Wilson**, R.M.: *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, 2001, xiv+602 pp., ISBN: 0-521-00601-505-01 (90B10)

[SzI97] **Szalkai István**: *Számrendszerek alkalmazásáról*, Polygon (Szeged), 7.kötet (1997), 85-88.old.

BSzalkai0@gmail.com

szalkai@almos.uni-pannon.hu (levelezési cím).