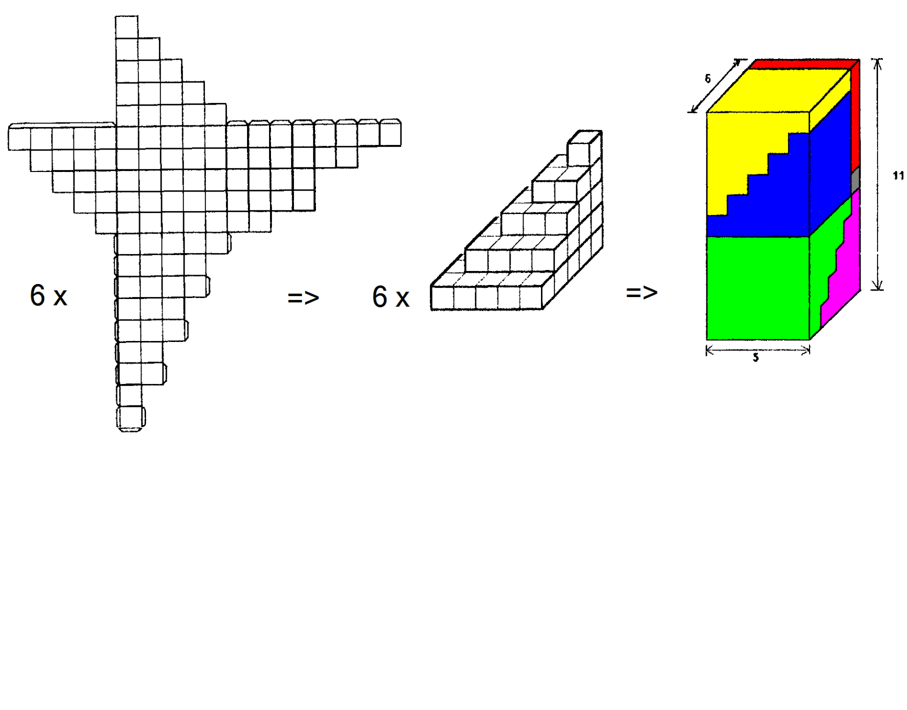
Kombinatorika elemei

dr. Szalkai István
Pannon Egyetem, Veszprém, Matematika Tanszék
szalkai@almos.uni-pannon.hu

2013.10.26.



2. fejezet

Kombinatorika elemei

Véges halmazok, a kombinatorika alapelvei, általános elemi leszámlálási módszerek (+ és $\cdot$). Teljes indukció.

Permutációk, kombinációk, variációk és kapcsolataik.

A Stirling formula, nagyértékű kifejezések becslése, példák.[1]

A kombinatorika a *megszámlálások*, szakkifejezéssel a *leszámlálások* tudománya. Bár véges halmazokkal foglalkozunk, a fejezet végén azt is szemléltetjük, hogy ez jó pár évmilliárdunkba kerülhet, ha nem vagyunk eléggé ügyesek.

A halmazok számosságát (elemeinek számát) $|A|$ vagy $\#(A)$ jelöli.

2.1. Általános módszerek

Egy véges halmaz (mondjuk útiholmik kirándulás előtt ill. után) összeszámlálásakor mindegyikünk kínosan ügyel az alábbi *két* természetes követelmény betartására:

2.1. Tanács (A kombinatorika alapelvei) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \textbf{1.)} & \textbf{Mindent összeszámoltunk ?} \\ \textbf{2.)} & \textbf{Semmit sem számoltunk kétszer ?} \\ \textbf{3.)} & \textbf{Csak a halmaz elemeit számoltuk meg ?} \end{array}} \tag{2.1}$$

[1] A címlapon látható ábra a 2.65. Feladat /0/ összefüggését szemlélteti.

Éppen ezért javasoljuk a kedves Olvasónak, hogy ZH írásakor se feledkezzen meg a kombinatorika fenti *két* alapelvéről! Igen, az összeszámlálás nehéz, kényes művelet, nemhiába a kombinatorika "*az összeszámlálás művészete*".

Az összes lehetőség összeszámlálásakor akár "gyalogos" módon csak felsoroljuk az összes esetet, akár elméleti alapon számítjuk ki a lehetőségek számát, az alábbi két módszert szoktunk használni:

2.2.: I. Módszer (Az összeszámlálás *két* alapmódszere)**:**

a) Ha a megszámlálandó eseteket *diszjunkt* (különálló) halmazokba osztottuk (szortíroztuk, partícionáltuk), akkor az egyes halmazokban levő eseteket nyilván **összeadjuk.** (Hiszen a halmazok diszjunkt úniójának az $+$ "felel meg".)

b) Ha a megszámlálandó lehetőségek több összetevőből állnak össze (épülnek fel), és az egyes összetevők egymástól függetlenül választhatók meg, azaz *bármelyik* "A" összetevőhöz *bármelyik* "B" összetevő párosítható, akkor a két (vagy több) összetevők lehetséges számát **összeszorozzuk.** (Hiszen a halmazok Descartes-szorzatának a $\cdot$ "felel meg".) $\square$

2.3. Példa: a) *Hányféle lyukasztás lehet a buszjegyek* 3×3 *mezőjében, ha a lyukasztógép legfeljebb* 3 *lyukat "készít" ?*

b) *A "francia" kártyacsomagból öt lapot osztva hányféleképpen lehet pár* (két azonos figura) *a kezünkben (a lapok kiosztásának sorrendje nem számít)?*

Megoldás: (Az $\binom{n}{k}$ *binomiális együtthatókat* [*kombinációk*] a 2.3.2 alfejezetben (2.17) -ben ismertetjük.)

a) A lyukak száma ezek szerint $1, 2$ vagy 3 (0 nem) lehet . Ezek száma $3 \times 3 = 9$ miatt rendre $\binom{9}{1}$, $\binom{9}{2}$, $\binom{9}{3}$, vagyis a lehetőségek száma összesen $\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 129$.

b) A "francia" -csomag $=$ 4 szín $\times$ 13 figura $=$ 52 lap. A két azonos figura (a *pár*) a 13 figura bármelyike lehet, ez $\binom{13}{1}$ lehetőség. Színeiket $\binom{4}{2}$ -féleképpen választhatjuk ki, de még a maradék 50 lapból 3 -at kell kiválasztanunk, ez $\binom{50}{3}$ lehetőség, kezünkben csak ezek után lesz *öt* lap. Vagyis az összes lehetőségek száma $\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{50}{2}$. $\square$

További általános, a kombinatorikában gyakran használt módszer az alábbi:

2.4. II. Módszer (bijekciók)**:** *A feladatot átfogalmazzuk, vagyis a keresett lehetőségek* halmaza *és egy másik (könyebben összeszámolható) halmaz között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést (bijekciót) keresünk, és az eredeti halmaz számossága (elemeinek száma) nyilván éppen az új halmaz számossága!*

2.5. Példa: *Hány részhalmaza van egy tetszőleges n -elemű halmaznak összesen, azaz mekkora $|\mathcal{P}(A)|$ ha $|A| = n$?*

Megoldás: Ne feledjük, hogy $\emptyset$ és A is elemei $\mathcal{P}(A)$ -nak. Írjuk fel A elemeit $\{a_1, ..., a_n\}$ alakban. Minden $X \subseteq A$ részhalmazt egyértelműen jellemez az, hogy az a_i elemek közül éppen melyek elemei X -nek és melyek nem. Ha minden $i \le n$ index esetén 0 jelöli az $a_i \notin X$ és 1 jelöli az $a_i \in X$ relációt, akkor magát az X halmazt kódolhatjuk az $x_1 x_2 ... x_n^{[2}$ kettes számrendszerbeli számmal, ráadásul ez a megfeleltetés $\mathcal{P}(A)$ elemei és az n hosszúságú kettes számrendszerbeli számok között kölcsönösen egy-egy értelmű. Márpedig a legkisebb szám $00...0^{[2} = 0$, a legnagyobb $11...1^{[2} = 2^n - 1$, a kettő között mindegyik szám pontosan egyszer előfordul, vagyis az n hosszúságú kettes számrendszerbeli számok száma 2^n, ami éppen $\mathcal{P}(A)$ pontos mérete.□

A II. Módszer alkalmazására a 2.23.Állítás bizonyításában láthatunk még példákat.

2.6. Feladat: *Számítsuk ki hasonlóan az*

$$B^A := \{f : A \to B \mid f \text{ függvény } \} \tag{2.2}$$

halmaz számosságát!

Útmutatás: Most m -alapú számrendszerben írjunk fel számokat, ahol $m = |B|$, a számok , n -jegyűek. □

Felhívjuk a figyelmet a fenti (2.2) egyenlőségben szereplő B^A hatványban a betűk sorrendjére!

Legfontosabb azonban a megoldandó feladat pontos *értelmezés*e! Nehéz megfogalmazni, eldönteni, hogy pontosan milyen eseteket tekintünk különbözőnek vagy azonosnak, de még azt is, miket is kell egyáltalában megszámlálnunk! Erre mindig ügyeljünk feladatmegoldás közben!

2.2. Teljes indukció

Nem csak a kombinatorikában, hanem a matematika bármely területén találkozhatunk a következő típusú állításokkal:

$$\text{"}\textit{Minden } n \in \mathbb{N} \textit{ természetes számra igaz, hogy ... }\text{"} \tag{2.3}$$

és a ... helyén egy (n -től függő) valamilyen állítás van. Ha ezt az állítást most $\Phi(n)$ *formulá*nak hívjuk, akkor bizonyítandó állításunk

$$\text{"}\textit{Minden } n \in \mathbb{N} \ \text{ természetes számra igaz } \Phi(n)\ .\ \text{"} \tag{2.4}$$

alakú lesz. Sok esetben azonban nem *minden* $n \in \mathbb{N}$, hanem csak *valamilyen (de adott!)* $n_0 \in \mathbb{N}$ számmal kezdődően, azaz csak $n \geq n_0$ esetén teljesül $\Phi(n)$ (legalábbis a bizonyítandó állítás szerint). Vagyis az általános alak:

$$\text{"}\textit{Minden } n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq n_0 \quad \text{természetes számra igaz} \quad \lneqq(n)\ .\text{"} \tag{2.5}$$

A továbbiakban mindig ez utóbbi általános alakra fogunk hivatkozni, hiszen a (2.4) alak éppen az $n_0 = 0$ speciális eset. n_0 pontos értékét legtöbbször nem feszegetjük, ez a feladat állításából általában kiderül: legkisebb olyannak választjuk, amelynél nagyobb *minden* $n \geq n_0$ számra $\Phi(n)$ már igaz.

Természetesen úgy nem igazolhatjuk a fenti (2.5) állítást hogy rendre ellenőrizzük $\Phi(n_0)$, $\Phi(n_0+1)$, $\Phi(n_0+2)$ ... értékeit, hiszen végtelen sok esetet nem is tudnánk véges időn belül ellenőrizni! Egy kicsit gyorsabb módszert kell választanunk!

2.7. Módszer (A Teljes Indukció)**:**

1. Kezdő lépés: *Ellenőrizzük* $\Phi(n_0)$ *értékét.*

2. Indukciós lépés: *Bizonyítsuk be az alábbi következtetés helyességét* tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *természetes számra:*

$$\text{"}\ \textit{Ha } \Phi(n) \textit{ igaz, akkor } \ \Phi(n+1) \ \textit{ is igaz}\ .\ \text{"} \tag{2.6}$$

Ekkor, a fenti két lépés sikeres elvégzése után igazoltuk $\Phi(n)$ *teljesülését* minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *számra.* □

A Teljes Indukció működését (elindulás és következtetés / indukálás) szokás végtelen lépcsőhöz is hasonlítani: "ha a legelső lépcsőfokra rá tudok lépni, és *minden* lépcsőfok után tovább tudok menni, akkor "természetesen" az összes lépcsőfokra fel tudok lépni"[2]. Bár ez a szemléltetés segíthet a módszer megértéséhez, az alábbi 2.8. Tételt nem helyettesíti!

Közelebb járunk az igazsághoz, ha a Teljes Indukció módszerét a "$\forall n \Phi(n)$" típusú állítások igazolásának egy hatékony módszerének ("mankó") tekintjük: nem a $\Phi(n)$ állítást kell igazolnunk (ráadásul nem az összes $n \in \mathbb{N}$ természetes számra egyszerre), hanem csak két, jóval egyszerűbb összefüggést: a fenti 1. és 2. lépésben leírtakat.

---

[2] vagy végtelen sok, sorban álló pletykás vénasszony közül elég a legelsőnek elmondani

A gyakorlatban sokszor az indukciós lépésben $\Phi(n+1)$ igazolásához nem csak a közvetlen megelőző $\Phi(n)$ állítást, hanem (néhány vagy az összes) előző $\Phi(i)$ értéket is fel kell használnunk. Vagyis $n \geq n_0$ esetén

$$\Phi(n_0) \wedge \Phi(n_0+1) \wedge ... \wedge \Phi(n) \quad \Rightarrow \quad \Phi(n+1)$$

vagy rövidebben

$$\bigwedge_{n_0 \leq i \leq n} \Phi(i) \quad \Rightarrow \quad \Phi(n+1)$$

alakú indukciós következtetést (lépést) használunk. A következő tétel mindezek legalitását is biztosítja.

2.8.Tétel (Teljes Indukció Tétele)**:** *Ha* $\Phi(n_0)$ *igaz* ("**kezdőlépés**"), *és minden* $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ *természetes számra igaz a*

$$\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1) \tag{2.7}$$

vagy a

$$\bigwedge_{n_0 \leq i \leq n} \Phi(i) \Rightarrow \Phi(n+1) \tag{2.8}$$

következtetés ("**indukciós lépés**"), *akkor* $\Phi(n)$ *igaz minden* $n \geq n_0$ *természetes számra, azaz igaz a*

$$\forall n \geq n_0 \quad \Phi(n)$$

állítás. $\square$

A Tételt természetesen úgy használjuk, hogy *igazoljuk* (ellenőrizzük) a $\Phi(n_0)$ állítást és a $\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)$ következtetést *minden* $n \geq n_0$ index esetén, amint az alábbi példában ezt részletesen meg is mutatjuk. Felhívjuk a kezdő Olvasók figyelmét, hogy a (2.7) illetve a (2.8) következtetések ("indukciós lépés") igazolásánál *nem* a $\Phi(n)$ vagy a $\Phi(n+1)$ állítást magát, *hanem* a "$\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)$" illetve az "$\bigwedge_{n_0 \leq i \leq n} \Phi(i) \Rightarrow \Phi(n+1)$" *következtetést* kell ellenőriznünk! [3]

[3] Emlékeztetünk arra a sokszor nehezen emészthető tényre, hogy a matematikai logikában a $h \Rightarrow h$ és $h \Rightarrow i$ (hamisból minden következik) *következtetés* maga igaz - nak van elfogadva, még ha a következtetés végeredménye hamis is.

2.9.Példa (Általánosított háromszög-egyenlőtlenség)**:** *Igazoljuk, hogy tetszőleges* $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ *komplex számokra*

$$|z_1 + ... + z_n| \leq |z_1| + ... + |z_n| \ ,$$

vagy rövidebben

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| \ . \tag{2.9}$$

Megoldás: A *kezdőlépés* nem okozhat gondot: legyen $n_0 = 1$, hiszen $n = 1$ esetén a (2.9) egyenlőtlenség a $|z_1| \leq |z_1|$ alakot ölti, ami triviálisan igaz.

Az indukciós lépésben $\Phi(n+1)$ igazolásához azonban a megelőző $\Phi(n)$ állítás nem elég, fel kell használnunk az $n = 2$ esetet is, ezért ezt az esetet is előbb (külön) igazolnunk kell. $n = 2$ esetén a (2.9) egyenlőtlenség az

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

összefüggést állítja, ami éppen az ún. *háromszög-egyenlőtlenség.* (Gondoljuk át a vektorokra [=komplex számok] vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség alapján!)

Most már rátérhetünk az indukciós lépés igazolására. $\Phi(n+1)$ ekkor a (2.9) egyenlőtlenséget állítja, de eggyel több, $n+1$ komplex szám összegére. A felső becslés (az egyenlőtlenség jobb oldala) eléréséhez a bal oldalt alakítjuk át, az eredeti n -tagú és kéttagú összegekre való bontások (az indukciós feltételek) felhasználásával:

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i + z_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| + |z_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|$$

Ezzel az indukciós állítást (lépést) bebizonyítottuk, így a 2.8. "Teljes Indukció" Tétele alapján a (2.9) állítás *minden* $n \in \mathbb{N}$ természetes számra igaz. $\square$

A fejezet végén a feladatok között jó néhány állítást sorolunk fel, amik segítségével a teljes indukciós bizonyítást gyakorolni lehet. Kiemeljük azonban, hogy nem csak a jelen fejezetben, hanem a diszkrét matematika szinte minden fejezetében (sőt az egész matematikában) lesz segítségünkre ez a bizonyítási módszer.

2.3. Permutációk, variációk, kombinációk

A most következő alfejezet első olvasásra úgy tűnhet (ami egyébként a vizsgázók gyakori hibája), hogy a permutációk, variációk, kombinációkra adott képletek "univerzálisak", "minden feladathoz" csak meg kell keresnünk ebben az alfejezetben bizonyított hat képlet valamelyikét és már is megoldottuk a feladatot ... !? Csak meggondolatlanul szabad bármelyik feladatra rávágni, hogy a feladat (mondjuk) "... ismétléses *kombinááááációóóóó" !* "

Tény, hogy ezzel a hat képlettel gyakran találkozunk véges (kombinatorikai) mennyiségek számolásakor, de nem mindig ilyen egyszerű a végeredmény. Azonban mindössze csak hat új *alapművelet*ről van szó, segítségükkel és az eddigi négy alapművelettel tudjuk az egyes mennyiségeket (feladatokat) megszámolni, a 2.1.("Általános módszerek") alfejezetben leírt 2.2. I.Módszer (és a 2.1. pontban említett "A kombinatorika két alapelve") útmutatásai alapján.

Még egy utolsó jó tanács: megtévesztő, hogy az elemi leszámlálási módszereket lényegében csak egy rövid alfejezetben (ebben) ismertetjük. Bár ebben minden elméleti ismeretet megtalálunk, a feladatok megoldásához gyakorlatot kell szereznünk, amire nem szabad sajnálnunk a több hónapos (!) gyakorlás idejét !

A következő fejezettől kezdődően (a könyv végéig) hasznunkra válik a következő rövid jelölés és egy egyszerű rekurzív összefüggés:

2.10. Definíció: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, $n \geq 1$ esetén*

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \tag{2.10}$$

és

$$0! := 1$$

az n szám **faktoriálisa**. □

2.11.Állítás: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes számra*

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \tag{2.11}$$

Bizonyítás: A definíció alapján azonnal látható. □

2.3.1. Permutációk

A *permutáció* szó latin eredetű, felcserélést, sorbarendezést jelent. A következő típusú feladatokat nevezzük permutációnak:

" n elemet hányféleképpen lehet sorba rendezni ? "

Hangsúlyozzuk, hogy nem feltétlenül kell fizikai, kézzel fogható tárgyakra gondolnunk, hiszen elvont "akármiket", "valamiket" is sorbarendezhetünk. Ez jól látható a 2.23. Tétel bizonyításának végén.

Olvasóink hiába edződtek meg a halmazelmélet kemény megpróbáltatásain, most egy n elemű halmaz elemeiről sem szólhatunk, hiszen a sorbarendezendő elemek között lehetnek azonosak is, és ez esettel is meg kell bírkóznunk (később) jelen alfejezetben !

2.12. Definíció: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén n különböző elem összes lehetséges sorbarendezéseinek számát* **n elem (ismétlés nélküli) permutációjá***nak hívjuk, és* $\mathbf{P_n}$ *-el jelöljük.*

Ha az elemek között azonosak is lehetnek, méghozzá összesen s -féle és az egyes típusokból rendre $k_1, ..., k_s$ van (azaz $k_1 + ... + k_s = n$), akkor az összes lehetséges sorbarendezések számát **n elem s -edrendű ismétléses permutációjá***nak hívjuk, és* $\mathbf{P_n^{k_1,...,k_s\ (ism)}}$ *-el jelöljük.* □

Angolul *permutation* és *generalized permutation* az ismétlés nélküli és az ismétléses permutációk elnevezése.

2.13.Állítás: *Tetszőleges $n, s \in \mathbb{N}$ természetes számokra*

(i) *n elem ismétlés nélküli permutációinak száma*

$$P_n = n!$$

(ii) *n elem ismétléses permutációinak száma,* $k_1, ..., k_s \in \mathbb{N}$, $k_1 + ... + k_s = n$ *esetén*

$$P_n^{k_1,...,k_s\ (ism)} = \frac{n!}{k_1! \cdot ... \cdot k_s!} \tag{2.12}$$

Bizonyítás: (i) Az állítást legegyszerűbb teljes indukcióval igazolni, ami házi feladat.

A közvetlen igazolás is hasonló: az n (különböző) elem sorbarendezésénél n helyre kell az elemeket elhelyeznünk. Az első helyre az n elem bármelyikét helyezhetjük, ez n lehetőség. Bármelyiket is helyeztük az első helyre, a második helyre mindig $n-1$ másik elemet rakhatunk, sőt ez azt is jelenti, hogy *bármelyik* (n) első helyen levő elem esetén *bármelyik* $n-1$ második helyen levő elemet párosíthatjuk, azaz (a 2.2. pontban leírt I.b) Módszer alapján) az első két helyre $n \cdot (n-1)$ -féleképpen helyezhetünk el két elemet.

A gondolatmenetet folytatva hasonlóan láthatjuk be, hogy az első két hely *bármilyen* betöltése esetén *további* $n-2$ -féleképpen tölthetjük fel a harmadik helyet, és mivel *bármelyik* $n \cdot (n-1)$ első két helyen levő elem esetén *bármelyik* $n-2$ harmadik helyen levő elemet tehetjük, így ismét az I.b) Módszer alapján az első három helyre $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ -féleképpen helyezhetünk el három elemet az adott n elem közül.

Tovább folytathatjuk gondolatmenetünket, n -szer ($n \in \mathbb{N}$ tetszőleges) a fenti gondolathoz hasonlóan, megkaphatjuk, hogy a lehetőségek száma $P = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ ami valóban $n!$.

Az $n = 0$ speciális esetben az állítás (pontosabban a 2.11.b)Definíció) $0! = 1$ "sorbarendezés" lehetőségét állítja, ami "hihető" is: az elemekhez hozzá sem kell nyúlnunk: ez valóban 1 lehetőség[(4)] .

(ii) Legegyszerűbb a feladat megoldását úgy megérteni, hogy n (billiárd-) golyóra gondolunk, amik közül k_1 db 1 -színű, k_2 db 2 -színű, s.í.t., és végül k_s db s -színű.

A golyók *fizikailag mind különbözőek*, tehát a valóságban ismét $n!$ különféle sorrend van, csak mi nem akarunk megkülönböztetni sok fizikai sorrendet, mondván: "minden sárga színű golyó egyforma".

Például, ha egy (akármilyen) sorbarendezésnél az 1 -színű golyókat egymás között csereberélgetjük (*permutáljuk*), ami $k_1!$ -féle sorrend, mi ezeket csak egyetlen sorrendnek vagyunk hajlandóak tekinteni! Mint említettük, ez a "szemet húnyásunk" (vagyis $k_1!$ *különféle* fizikainak sorrendet *azonosnak* tekintünk) AKÁRMILYEN sorbarendezésnél ugyanúgy $k_1!$ különféle sorrendet tekint azonosnak. Vagyis az összes $n!$ fizikai sorrendet csoportosíthatjuk: egy-egy csoportban az azonosnak látszó $k_1!$ sorrend kerül.

Hány sorrendnek is számoljuk tehát az összes sorrendet (ha *csak* az 1 -típusú golyókat nem különböztetjük meg)? Ahány csoportot az előbb képeztünk, azaz $\frac{n!}{k_1!}$.

[4)] Ez nem nézőpont kérdése, hanem további kombinatorikai összefüggéseink (képleteink), pl. a (2.11) rekurzív összefüggés csak a $0! = 1$ definíció esetén maradnak igazak minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, a $P_0 = 1$ definíció is ezzel van összhangban, ami végülis szemléletünket sem "bántja".

Ha a 2 -típusú golyókat sem különböztetjük meg egymás között, akkor — a fenti gondolatmenethez hasonlóan — az előbb készített csoportokat tovább csoportosíthatjuk nagyobb csoportokra, mindegyik nagyobb csoport $k_2!$ előbbi kisebb csoportot tartalmaz, vagyis már csak $\frac{n!}{k_1!k_2!}$ általunk megkülönböztethető (nagy) csoport van.

A fenti gondolatmenetet mindegyik típusra elvégezve valóban azt kapjuk, hogy az általunk megkülönböztethető sorrendek száma valóban (2.12). □

Az előző állításban szereplő (2.12) kifejezés (is) más diszkrét matematikai összefüggések leírásában is előfordul, ezért más jelölésük és elnevezésük is használatos.

2.14. Definíció: *Tetszőleges* n, $k_1, ..., k_s$,$s \in \mathbb{N}$ *természetes számokra,* $k_1 + ... + k_s = n$, *esetén a*

$$\binom{n}{k_1, ..., k_s} := \frac{n!}{k_1! \cdot ... \cdot k_s!} \tag{2.13}$$

kifejezezést **polinomiális együttható***nak nevezzük.* □

A polinomiális együtthatók *egyik* alkalmazása a 2.36. *Polinomiális Tétel.*

2.3.2. Variációk, kombinációk

Ismét latin eredetű szakkifejezésekkel találkoztunk. Eredetileg a *variáció* szó változatosságot, a *kombináció* kiválasztást, kiválogatást, csoportosítást jelent, hétköznapi használatuk is ennek megfelelő. Felhívjuk azonban a figyelmet, hogy az alábbi definíciókban precíz jelentéseket rendelünk e szavakhoz, vagyis e pillanattól kezdve feladatok, problémák megoldásánál tartózkodjunk a felelőtlen "a variációk száma ..." és hasonló megjegyzésektől, inkább használjuk "a *lehetőségek* száma ..." szófordulatot.

Mind a variációkat mind a kombinációkat jelen alfejezetben egyszerre tárgyaljuk, mert nagyon sok hasonlóság és a kapcsolat van közöttük, sőt könnyen össze is keverhetők.

Mindkét probléma egy halmaz elemei közül néhányuk (összes lehetséges) kiválasztásának számát kérdezi, bizonyos szempontok szerint. A szemléletesség kedvéért *tárgyak kihúzásá*t emlegetjük, de természetesen *bármely elvont halmaz* elemeinek *kiválasztásá*ra is ugyanazok az összefüggések lesznek igazak. E fejezetben feltehetjük, hogy az alaphalmaz elemei különbözőek, mert ha az egyik típusú elemből több példányt szeretnénk feltételezni, akkor egyszerűen tegyük vissza a korábban kihúzott elemeket a kalapba, így ismét kihúzhatjuk őket. Persze, a visszatevés előtt megjegyezzük (vagy felírjuk) a kihúzott elemek fajtáját, sorrendjét, számát és egyéb (számunkra) fontos adatait. Megnyugtatjuk az Olvasót: az alábbi definíciók elolvasása után érthetőbb lesz a *fenti* gondolatmenet (legalábbis reméljük).

Alaposan figyeljük meg a variációk és a kombinációk közötti hasonlóságokat és különbségeket, ezt készítjük elő az alábbi két definícióban!

2.15. Definíció: *Legyen A egy tetszőleges halmaz.*[5]

Visszatevéses mintavétel*nek nevezzük azt, ha a halmaz elemeit egyesével kivesszük, feljegyezzük, de minden következő elem kihúzása előtt az előzőleg kihúzott eleme(ke)t visszatesszük a halmazba.*

Ha csak a halmaz elemeit húzzuk ki egyesével (persze csak amíg lehet), és az előzőleg kihúzott elemeket nem *tesszük vissza, akkor* **visszatevés nélküli mintavétel***ről beszélünk.* □

2.16. Definíció: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén n különböző elem halmazából k elem visszatevés nélküli mintavételeinek (kihúzásainak) összes lehetséges számát* **n elem k -adrendű (ismétlés/visszatevés nélküli)** *vagy egyszerűen csak* **variációjá***nak nevezzük, ha a kihúzott elemek kihúzásának* sorrendje lényeges, *és* $\mathbf{V_n^k}$ *-el jelöljük !*

Ha a kihúzás (mintavétel) visszatevéses, akkor **ismétléses/ visszatevéses variáció***ról beszélünk,* $\mathbf{V_n^{k\,(ism)}}$ *-el jelöljük, és ismét a kihúzott elemek kihúzásának* sorrendje lényeges! □

2.17. Definíció: *Ha a fenti definícióban a kihúzott elemek kihúzásának* sorrendje lényegtelen, *akkor* **n elem k -adrendű (ismétlés/ visszatevés nélküli)** *vagy egyszerűen csak* **kombinációjá***ról beszélünk és* $\mathbf{C_n^k}$ *-val jelöljük, illetve a második esetben* **ismétléses/visszatevéses kombináció***ról van szó, amit* $\mathbf{C_n^{k\,(ism)}}$ *-el jelölünk.* □

Ismételten felhívjuk a figyelmet a *variációk* és a *kombinációk* definíciói közötti különbségekre !

Angolul *variation* és *combination* az ismétlés nélküli, míg *generalized variation* és *generalized combination* az ismétléses variációk/kombinációk elnevezése.

---

[5] A halmaz definíciója szerint elemei mind különbözőek !

2.18. Állítás: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok, $k \geq 1$ esetén n elem k -adosztályú ismétlés nélküli variációinak száma*

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \tag{2.14}$$

Bizonyítás: Lényegében itt is a 2.13.Állítás (ismétlés nélküli permutációk) gondolatmenete mutatja meg a lehetőségek számát.

Mivel a halmaz elemei, amelyeket egyesével és *visszatevés nélkül* húzunk ki egymás után, mind különbözőek, ezért az egyes kihúzások alkalmával az egyes lehetőségek száma rendre n , n-1 , n-2 ,... . Mivel a kihúzott elemek kihúzási sorrendje (variáció lévén) *lényeges*, így a 2.4.Állítás (permutációk) bizonyításában leírtakhoz hasonlóan beláthatjuk, hogy ezen lehetőségek számát *össze kell szoroznunk*! De meddig ?

A legutolsó elem, a k -adik kihúzásakor éppen $n - (k-1)$ elem közül választhatunk, hiszen előtte $k-1$ elemet húztunk ki (és persze eredetileg n elemünk volt.) Ezzel éppen a (2.14) egyenlőséget kaptuk, Q.E.D. □

Megjegyzések: Vigyázzunk a (2.14) kifejezés legutolsó szorzótényezőjére: az *nem* $(n-k)$ (amit persze megjegyezni könnyebb lenne), hanem

$$(n-(k-1)) = n-k+1 \quad ,$$

hiszen, mint a bizonyításban meggondoltuk: $k-1$ elemet vettünk ki a legutolsó (k -adik) elem előtt. Ha pedig[6] gyorsabban kell a képletet elővennünk mint a fenti bizonyítást meg tudjuk gondolni, akkor csak a következő "versikét" motyogjuk el: " k tárgyat $\Rightarrow$ k szorzótényező".

Érdemes külön meggondolnunk a $k > n$ és a $k = 0$ eseteket is (a többi esetet a bizonyításban meggondoltuk) . $k > n$ esetben mind a (2.14) kifejezés (képlet), mind szemléletünk is $V_n^k = 0$ -át ad. Ugyanis a (2.14) kifejezésben $k > n$ esetén szerepel az $n - n = 0$ szorzótényező, míg hétköznapi (és matematikai) tapasztalatunk szerint többet egyetlen halmazból sem lehet kivenni mint amennyi eleme eredetileg benne volt, ha *ismétlés nélküli* mintavételről van szó.

A $k = 0$ esetben hozzá sem kell nyúlnunk a halmaz elemeihez, ez egyetlen lehetőség. A (2.14) kifejezés is ugyanezt az eredményt adja, hiszen, ha a szorzat tagjai n -től *csökkennek* $n+1$ -ig, akkor *egyetlen tagja sincs* a (2.14) -beli szorzatnak, ami pedig *megállapodás* (definíció) szerint $:= 1$.

Vagyis a (2.14) összefüggésben $k \in \mathbb{N}$ *tetszőleges* természetes szám lehet!

[6] de csak a gyengébbek kedvéért!

2.19. Állítás: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén n elem k -ad osztályú ismétléses variációinak száma*

$$V_n^{k\,(ism)} = n^k \tag{2.15}$$

Bizonyítás: Mint az előző bizonyításban is, az egyes elemek kihúzásainak lehetséges számát kell meghatároznunk és egyszerűen csak összeszoroznunk, hiszen a (kihúzott) elemek kihúzási sorrendje megint *lényeges.* Márpedig most, mivel visszatesszük mindegyik kihúzott elemet, a soron következő *mindegyik* elem kihúzására mindig ugyanannyi, n lehetőségünk van, azaz az összes lehetőségek száma most valóban n, amit bizonyítanunk kellett. $\square$

Megjegyezzük, hogy a most bizonyított Állításban szereplő (2.15) kifejezésben $k \in \mathbb{N}$ *tetszőleges* természetes szám lehet, akár $k > n$ vagy akár $k = 0$. A $k > n$ esettel felesleges foglalkoznunk, hiszen (a visszatevések miatt) akármeddig folytathatjuk a mintavételezést! $k = 0$ esetén pedig a (2.15) képlet ismét 0 -val egyenlő, míg a gyakorlatban is ez azt jelenti, hogy hozzá sem kell kezdenünk az elemek kiválasztásához.

2.20. Állítás: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma*

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \tag{2.16}$$

Bizonyítás: Idézzük csak fel, mi is a *különbség* a kombinációk és a variációk között? A kiválasztott (kihúzott) elemek csak maguk érdekesek, vagy az is, hogy milyen sorrendben lettek kiválasztva!

Mivel a 2.18.Állításban sem tettük vissza a már kiválasztott elemeket, akárcsak a jelen Állításunkban, próbáljuk meg a (2.14) eredményt mostani feladatunkhoz felhasználni. Továbbá, a kiválasztott elemek mind *különbözőek,* hiszen mindig újat húztunk, és az eredeti halmaz elemei is mind különbözőek voltak.

Tekintsünk egy lehetőséget, azaz a kiválasztott elemek egy halmazát. Ha a kombináció szemszögéből nézzük, akkor ez valóban halmaz, hiszen a (kiválasztott) elemek sorrendje lényegtelen, vagyis egy lehetőség, míg a variáció szemszögéből nézve ez többféleképpen, többféle sorrendben volt lehetséges, a kihúzott elemek kihúzási sorrendjei tekintetében, vagyis $P_k = k!$ -féleképpen.

Vagyis a kombináció *minden* megszámlálandó kiválasztásához a (2.14) variáció $k!$ lehetősége tartozik, ráadásul különböző kiválasztásokhoz a lehetőségek különböző (diszjunkt) részhalmazai, ami alapján

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!}$$

majd a (2.14) összefüggés miatt

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}$$

amit bizonyítanunk kellett, Q.E.D. $\square$

Az ismétlés nélküli kombinációkra elterjedtebb az alábbi jelölés, a jegyzet hátralevő részében mi ezt használjuk.

2.21. Definíció: *Tetszőleges* $n, k \in \mathbb{N}$ *természetes számok esetén bevezetjük a következő jelölést:*

$$\binom{n}{k} \quad := \quad C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \tag{2.17}$$

amit **binomiális együttható***nak nevezünk és* "n alatt k"*-nak*[7] *olvasunk.*$\square$

2.22. Megjegyzések: (i) Ügyeljünk a kombinációk kétféle jelölésének írásmódjára: n és k fordított elhelyzésben van: $C_n^k = \binom{n}{k}$!

A *kerek* $\binom{n}{k}$ zárójeles jelölésnél nincs törtvonal, a számelméletben használatos $\left(\frac{a}{p}\right)$ *Legendre-szimbólum* -mal ne tévesszük össze!

(ii) A 2.20.Állításban bizonyított (2.16) összefüggést sokszor úgy alkalmazzuk, hogy a kiválasztandó elemeket nem egyesével, egymás után vesszük ki az alaphalmazból (és utána feledkezünk el a kihúzásuk sorrendjéről[8]), hanem egyszerűen egyszerre markoljuk meg és vesszük ki őket (ún. "*merítőkaná*l" -módszer).

(iii) A binomiális együtthatóknál (ismétlés *nélküli* kombinációknál) a k és n paraméterek ismét *tetszőleges* természetes számok: $n = 0$, $k = 0$ vagy $k > n$ esetén mind a képlet mind "gyakorlati" feladatunk (azaz elemek kihúzása) is 0 eredményt ad !

---

[7] Vigyázat: angolul " *n over k* " $= \frac{n}{k}$ és " *n choose k* " $= \binom{n}{k}$.

[8] mint a hagyományos "90 -es" lottó sorsolásakor is a kihúzás után állítják "emelkedő számsorrendbe" a kihúzott számokat

(iv) A binomiális együtthatók (2.17) definíciójában szereplő képletét többféleképpen is kiszámolhatjuk, mint például

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{2.18}$$

vagy

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot ... \cdot \frac{n-k+1}{1}$$

és még sok más módon is, e képletek azonosságát minden Olvasó könnyen beláthatja (HF). A 3.2. ”Binomiális együtthatók tulajdonságai” c. alfejezet elején részletesebben foglalkozunk ezzel a kérdéssel is.

(v) A ”binomiális” és ”polinomiális” elnevezésekből[9] valamely kapcsolatot sejtünk a binomiális és polinomiális együtthatók között. Jól érezzük: az alábbi 2.25.Állításban megmutatjuk, hogy az $s = 2$ speciális esetben (kétféle, de sok elemet kell sorbarendeznünk) éppen a binomiális együtthatókat kapjuk. A megegyezés annál is érdekesebb, mert a *binomiális* együtthatókkal a *kombinációk*nál (elemek kiválasztásánál), míg a *polinomiális* együtthatókkal a *permutációk*nál (elemek sorbarendezésénél) találkoztunk. A következő fejezetben ismertetjük Newton ”binomiális” tételét és a ”Polinomiális” tételt, melyek még jobban rávilágítanak e két mennyiség kapcsolatára. Használatos még az $s = 3$ esetben a *trinomiális* együttható elnevezés is.

2.23. Tétel: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációinak száma*

$$C_n^{k\,(ism)} = \binom{n+k-1}{n-1} \tag{2.19}$$

Bizonyítás: Itt sajnos nem használhatjuk fel a variációknál (akár ismétléses akár ismétlés nélküli) igazolt összefüggéseket, mert hiába tudjuk megszámolni az egyes (bizonyos ismétlődéssel) kihúzott elemek kihúzási sorrendjeinek számát, az ismétléses permutációknál megismertek szerint: az egyes sorrendek száma *különböző*! , az ismétlődő elemek fajtáitól és számától függően!

A következő ötlettel (”*jegyzetlapok*”) azonban célhoz érhetünk: mivel n különböző elem közül választunk ki néhányat, de csak a kihúzottak milyensége és *nem* sorrendje a lényeg, vegyünk elő a húzások megkezdése előtt n

[9] *bi nom* = két tag, *tri nom* = három tag, *poli nom* = sok tag (görögül)

jegyzetlapot, az n kihúzható elem mindegyike számára egyet-egyet, és a húzás folyamán minden egyes kihúzott elemnél, visszatevése előtt, húzzunk egyszerűen egy vonalkát (strigulát[10]) a megfelelő papírlapra. Most már csak az a kérdés, hogy *"hányféleképpen húzhatunk k vonalat n papírlapra ? "*

Már a fenti gondolatmenetben is a 2.4. pontban jelzett II.Módszert ("bijekciók") használtuk: elemek kihúzása és rendezgetése helyett papírlapra írogattunk vonalkákat, és mivel e két halmaznak: elemek visszatevéses de sorrend nélküli mintavételeinek halmaza *és* a papírlapokra írt vonalka - sorozatok halmazának ugyanannyi eleme van (újabb HF!), elegendő ez utóbbi halmaz elemeit összeszámolnunk!

Ez utóbbi problémánkon pedig ismét egy átfogalmazással (bijekció) segíthetünk. Hiába raktuk ugyanis sorba az n papírlapot, a rajtuk levő strigulák sorozata összemosódna, ha a papírlapok (pontosabban a rajtuk levő vonalkák) közé nem raknánk valami elválasztó jelet, mondjuk egy-egy 0 számjegyet. Hát rakjunk, összesen $n-1$ -et!

Így a következő újabb feladathoz jutunk:

" Hány olyan, $n+k-1$ hosszú, 0 és 1 jelekből álló (bináris) jelsorozatunk van, amelyben $n-1$ számú 0 és k darab 1 jel van ? "

Természetesen előbb meg kell gondolnunk, hogy a két halmaznak (vonalak a papírlapokon és a fenti jelsorozatok) ugyanannyi eleme van (újabb HF.) !

Ez pedig már gyerekjáték, pontosabban ismétlés *nélküli* kombináció,hiszen $n+k-1$ különböző elem (a jelek pozíciói, a helyiértékek) közül kell kiválasztanunk $n-1$ -et, a 0 jelek helyeit, méghozzá kiválasztásuk sorrendje lényegtelen, ez pedig valóban ismétlés nélküli kombináció! A 0 jelek választják el az egyes papírlapokat. Így, a 2.20. Állítás alapján a lehetőségek száma valóban

$$C_n^{k\,(ism)} = C_{n+k-1}^{n-1} = \binom{n+k-1}{n-1}\,. \quad \Box \tag{2.20}$$

2.24. Megjegyzések: (i) A fenti bizonyítás végén pozíciókból (helyiértékekből) választottunk ki néhányat, azaz, mint már kezdettől fogva hangsúlyoztuk, legtöbbször nem valódi tárgyakból hanem elvontabb elemek közül kell kiválasztanunk néhányat.

(ii) Vegyük észre, hogy a most megvizsgált *ismétléses* kombinációknál az n és k paraméterek *tetszőleges* természetes számok lehetnek: mind a (2.19)

[10] kis vonal, pipa (német)

kifejezés (képlet) mind a gyakorlati probléma (húzogatások) értelmezhetők, és a fenti bizonyítás is érvényes.

(iii) Nehéz megjegyezni a (2.19) kifejezésben a betűk pontos helyét és számát, főleg ha megemlítjük az alábbi alternatívát:

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} . \tag{2.21}$$

Ezt bárki könnyen pár perc alatt igazolhatja a (2.18) képlet alapján (újabb HF!), bár a ”Binomiális együtthatók tulajdonságai” alfejezet 2.29.(iii) Állításában részletesen foglalkozunk a binomiális együtthatók fenti és hasonló tulajdonságaival.

Visszatérve a (2.19) képlet memorizálására, saját tapasztalatunk alapján csak egy módszert ajánlhatunk: a bizonyítás fejben (pillanatok alatti) ”végigpörgetését” .

Már említettük, hogy a különböző permutációk, variációk és kombinációk között szoros kapcsolat van. Két egyszerűbb összefüggés igazolásával zárjuk alfejezetünket, további összefüggéseket és tulajdonságkat találhatunk a következő alfejezetben.

2.25. Állítás: *Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén*

$$V_n^n = P_n$$

és

$$C_n^k = P_n^{k,n-k\ (ism)}$$

ami képletben

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k} \quad .$$

Bizonyítás: Mint *minden* kombinatorikai összefüggést, a fentieket is bizonyíthatjuk mind kombinatorikai okoskodással, mind a képletek alakításával. Most az egyszer utoljára mind a két módszert részletesen ismertetjük.

V_n^n nem más, mint n elemet a halmazból egyesével kihúzunk és a sorrendet is feljegyezzük, mondjuk úgy, hogy a kihúzás sorrendjében sorban lerakjuk őket. Ez pedig mindig egy sorbarendezés azaz permutáció, ráadásul P_n , hiszen mind az n különböző elemet minden lehetséges módon ki kell választani azaz sorbarendezni.

A képletek alapján pedig

$$V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) = n! = P_n$$

C_n^k és $P_n^{k,n-k\ (ism)}$ mindketten $k > n$ esetén 0 értéket adnak, vagyis azonosak. (Algebrai bizonyítás vége.)

Legyen tehát $0 \le k \le n$ rögzített. $P_n^{k,n-k\ (ism)}$ kombinatorikailag azt jelenti, hogy kétféle elemünk van, k illetve $n-k$ példányban, azaz összesen n elem, amiket sorba kell raknunk (persze az összes lehetséges módon). Egy sorbarendezést pedig úgy is elkészíthetünk, hogy először az egyik típusú elemek helyeit (pozícióit) választjuk ki, a kiválasztás sorrendje lényegtelen mert mindegyik első típusú elemet azonosnak tekintünk, majd végül a maradék második típusú elemeket egyszerűen csak letesszük az üres helyekre. Márpedig, amikor az első típusú elemek helyeit választjuk ki, n különböző elem (helyek, pozíciók) közül kell k -t kiválasztanunk, ismétlés nélkül és a helyek kiválasztásának sorrendje sem lényeges. Ez pedig éppen egy ismétlés nélküli kombináció, pontosabban C_n^k . (Kombinatorikai bizonyítás vége.)

A képletek alapján egyszerű az egyenlőség igazolása: a (2.13) és (2.18) összefüggések alapján

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k, n-k} = P_n^{k,n-k\ (ism)}$$

amit bizonyítanunk kellett, Q.E.D. $\square$

A fenti bizonyítás alapján az az érzésünk támadhat, hogy képletekkel sokkal egyszerűbb bármilyen összefüggést bebizonyítanunk, a kombinatorikai okoskodás sokkal megerőltetőbb. Hiába ismételgetnénk, hogy a kombinatorika sem a képletek alakítgatásának tudománya. Meggyőzőbb inkább, ha például a 2.2. Feladatot ajánljuk az Olvasó figyelmébe, vagy többek között a szerző $[SzI,'97]$ feladatgyűjteményének 7.11, 7.24, 7.25, 7.27, 7.30, 8.6, 8.7, 8.14, 8.20, 8.21, 8.31 vagy 8.37 feladatait.

2.4. A binomiális együtthatók tulajdonságai

Mint az előző fejezetben láttuk, definíció szerint az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatók *kombinatorikailag* csak $1 \le k \le n$ esetén értelmezhetők. A (2.17) formula alapján azonban tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számokra értelmezhetők (csak megismételjük a (2.17) definíciót):

2.26. Definíció: *Tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén legyen*

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \quad . \qquad \square \tag{2.22}$$

Könnyen belátható, hogy a fenti kifejezés valóban *tetszőleges* $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számokra értelmezhető, és $0 \leq k \leq n$ esetén megegyezik a (2.16) és a (2.18) formulákkal:

2.27. Állítás: *Tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számok, $0 \leq k \leq n$ esetén fennáll az*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{2.23}$$

azonosság. (Emlékeztetünk arra, hogy $0! = 1$.) $\square$

Megjegyzések: Bár elméleti számításoknál általában a (2.23) formula kényelmesebb, nagy számok esetén azonban gyakran a benne szereplő faktoriálisok már el sem férnek a számológépen ($70! \approx 1,198 \cdot 10^{100}$ vagy gondoljunk csak Stirling (2.28) tételére), így csak a (2.22) képlet a kivitelezhető. **Például** a lottóhúzásban szereplő $\binom{90}{5}$ értéke nem számolható ki a $\frac{90!}{5! \cdot 85!}$ módon, míg a $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ formula kiszámítása másodpercekbe sem telik.

Még nagyobb számokra még a (2.23) formulát is óvatosan kell alkalmazni. Például a $\binom{200}{100} = \frac{200 \cdot 199 \cdot \ldots \cdot 101}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$ számítási módszer sem járható út, de a

$$\binom{200}{100} = \frac{200}{100} \cdot \frac{199}{99} \cdot \ldots \cdot \frac{101}{1}$$

átalakítással könnyedén célhoz érhetünk: $\binom{200}{100} \approx 9,05 \cdot 10^{58}$.

2.28. Feladat: *Becsüljük meg a (2.28) Sirling formula segítségével $\binom{n}{k}$ értékét nagy n és k esetén!* $\square$

Az alábbiakban felsoroljuk a binomiális együtthatók legfontosabb tulajdonságait. A legtöbb azonosság igazolható akár kombinatorikai megfontolásokkal, akár a (2.22) vagy (2.23) képletek segítségével. Ahol lehetséges, mi a kombinatorikai gondolatmeneteket részesítjük előnyben, de javasoljuk az Olvasónak a (2.22) és (2.23) képletek alapján a számításos "ellenőrzést" is!

Hangsúlyozzuk, hogy mi csak néhány elemi azonosságot ismertetünk, Gould 1972-ben megjelent könyvében félezer azonosság található, a lista azóta többszörösére növekedett. Sok érdekes azonosság található még szinte minden kombinatorikai könyvben.

2.29. Állítás: *Tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén igazak az alábbi összefüggések:*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{i}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \tag{ii}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{iii}$$

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{ha } \; k > n \tag{iv}$$

Bizonyítás: **(i)** n elemből 0 elem kiválasztása: hozzá sem nyúlunk a halmazhoz. n elem kiválasztása: az összeset ki kell vennünk Mind a két alkalommal a lehetőségek száma 1 .

(ii) n elemből 1 elem kiválasztása: *valamelyiket* kell kivennünk, ez n lehetőség. $n-1$ elem kiválasztása: pontosan egyiket, valamelyiket kell *bennt hagynunk,* ez is n lehetőség.

(iii) n elemből $n-k$ elem kiválasztása *pontosan* azt jelenti, hogy kiválasztjuk azt a k elemet, amit a halmazban *bennthagyunk,* vagyis a többi k elemet tesszük ki a kalapból.

A (iii) tulajdonságot szokás **szimmetria - tulajdonság -**nak is nevezni.

(iv) n elemből semmiképpen sem tudunk többet kiválasztani (visszatevés nélkül) mint amennyien vannak. □

2.30. Állítás: *Tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén igaz a következő összefüggés:*

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \tag{2.24}$$

Bizonyítás: n régi és $+1$ új elemből k elemet kiválasztani lehet úgy is, hogy az új elemet is kiválasztottuk, vagyis már csak $k-1$ elem kiválasztásán kell gondolkoznunk, ami $\binom{n}{k-1}$ lehetőség, vagy pedig mindegyik kiválasztandó elem régi, ami pedig $\binom{n}{k}$ lehetőség. □

A fenti azonosság az alapja az ún. Pascal-háromszögnek, amikor a binomiális együtthatókat háromszög alakban rendezzük el, szemléltetés céljából:

$$\binom{0}{0}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

azaz

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \end{array}$$

A 2.29. Állítás (i) összefüggése szerint mindegyik sor szélső elemei 1 -ek, továbbá a (2.24) összefüggés szerint mindegyik elem a ”felette” (balra és jobbra) levő elemek összege, így a Pascal háromszög akármeddig könnyen folytatható. (A Pascal háromszög a ”*Négyjegyű függvénytáblázatok*” c. középiskolai segédkönyvben is megtalálható a 14.B. táblázatban.)

A binomiális együtthatók eddigi és további tételei is szemléltethetőek a Pascal háromszög soraiban, átlóiban stb., ezek vizsgálatára mi most nem térünk ki.

2.31. Állítás (”Vandermode-konvolúció”)**:** *Tetszőleges $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén igaz a következő összefüggés:*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{\ell}{k-i} = \binom{n+\ell}{k} \tag{2.25}$$

Bizonyítás: Hasonlít a (2.24) összefüggés bizonyításához.

Az $n+\ell$ elem közül n elem Jóska tulajdona míg ℓ Marié. Ha k elemet kell tőlük kölcsönkérnünk, akkor valamennyit, mondjuk i -t Jóskától, míg $k-i$ -t Maritól kapunk, külön-külön ez $\binom{n}{i}$ ill. $\binom{\ell}{k-i}$ -féle lehetőség rögzített i esetén. Mivel egymástól függetlenül kapunk tőlük, ezért kell e két mennyiséget összeszorozni, és mivel különböző i -kre ezek más-más esetek, ezért lehet összeadni. (Lásd még az "Összeszámlálás két alapmódszerét" a 2. fejezet 2.2. pontjában.) $\square$

A most bizonyított összefüggés valóban a (2.24) általánosítása, hiszen $\ell = 1$ választással az összegnek csak két tagja van: $i = 0$ és 1 .

2.32. Állítás: *Tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén igaz a következő összefüggés:*

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{2.26}$$

Bizonyítás: Hányféleképpen lehet az $1, 2, \ldots, n+1$ számok közül $k+1$ -et kiválasztani? Számoljuk külön azon esetek szerint, amikor is a legnagyobb kiválasztott szám $k+1$ (kisebb nem lehet), $k+2$, ... vagy $n+1$. Ekkor a maradék k számot a legnagyobb szám alatt lehet kiválasztani, rendre a k , $k+1$, ... , n számok közül, ami pedig rendre $\binom{k}{k}$, $\binom{k+1}{k}$, ... , $\binom{n}{k}$ lehetőség. Az összeszámolt lehetőségek mind különbözőek. $\square$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a fenti összeg

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

alakban is írható, hiszen a 3.9.(iv) összefüggés alapján $i < k$ esetén az összeadandó tagok mind 0 -ák !

Mint említettük, a binomiális együtthatókra vonatkozó összefüggések az együtthatók (2.17) vagy (2.18) képlete alapján számolással is igazolhatók. A fenti (2.26) összefüggés például a (2.24) alapján is igazolható, n -re vonatkozó teljes indukcióval.

2.33. Állítás: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén az $\binom{n}{i}$ binomiális együtthatók $0 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ esetén szigorúan monoton növekednek míg $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \le i \le n$ esetén szigorúan monoton csökkennek.*

Bizonyítás: A triviális

$$\binom{n}{i+1} = \binom{n}{i} \cdot \frac{n-i}{i+1}$$

összefüggés alapján az állítás könnyen belátható. $\square$

Megjegyezzük, hogy a 3.9. Állítás (iii) összefüggése szerint elegendő csak a jelen állítás egyik felét igazolni. Vagyis az $\binom{n}{i}$ együtthatók (rögzített n esetén) a sorozat közepéig monoton nőnek, majd szimmetrikusan csökkennek. Emlékeztetünk arra, hogy a sorozat két szélén $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ és $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ áll, míg a közepén elhelyezkedő legnagyobb elem, $\binom{n}{n/2}$ értéke az előző fejezetben megismert (2.28) Stirling- formula alapján

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} \quad \approx \quad 2^n \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \quad .$$

2.5. Binomiális és polinomiális tételek

Közismert az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ képlet, vagyis tetszőleges kéttagú *(binom)* összeget (majdnem!) "tagonként" tudunk hatványozni. Természetesen a és b tetszőleges valós vagy komplex számok, esetleg kvaterniók[(11)], vagy akár polinomok, tetszőleges függvények stb. is lehetnek. Hasonlóan könnyű több tagú összeget (*polinom*[(12)]) is magasabb hatványra emelni. (Az egyszerűség miatt mi csak komplex számokkal foglalkozunk.)

Kezdjük a binomiális tétellel.

2.34. Tétel: (Newton[(13)] binomiális tétele) *Tetszőleges $a, b \in \mathbb{C}$ komplex számok és $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n-i} \quad . \tag{2.27}$$

[11)] a kvaterniók számteste $\mathbf{Q} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ahol $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ és $ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j,$ és természetesen $\mathbb{C} \subset \mathbf{Q}$.

[12)] görög szóösszetételek, szó szerinti fordításban *bi nom = két tag, tri nom = három tag, poli nom = sok tag*

[13)] Isaac Newton (1643-1727) közismert angol matematikus és fizikus

Bizonyítás: A tételt általában n -re vonatkozó indukcióval szokás bizonyítani, a 3.10. Állítás (2.24) összefüggése alapján. (Javasoljuk az Olvasónak gyakorlásképpen azt a bizonyítást is átgondolni.) Mi inkább egy közvetlen számolási módszert választottunk, ami egyrészt a tétel felfedezésének élményét is adja, másrészt a kombinatorikai fogalmakkal való kapcsolatát is jobban felfedi. Számoljuk ki tehát a hatványt a definíció alapján (n-tagú szorzat):

$$(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)\ .$$

Persze minden tagot mindegyikkel megszorzunk. De nem először csak az első két zárójelet, majd a szorzatot a harmadik zárójellel szorozzuk be és így tovább! Hanem az n zárójelet egyszerre: mindegyik zárójelből minden lehetséges módon kiveszünk vagy a -t vagy b -t, és ezeket a tagokat szorozzuk össze egymással (vagyis valóban $a^i b^{n-i}$ alakú tagokat kapunk minden lehetséges $0 \le i \le n$ értékre), és persze a végén az azonos hatványokat összegyűjtjük egy $\sum$ -ba.

Hányféleképpen kaphatunk $a^i b^{n-i}$ alakú szorzatokat rögzített i esetén? Vagyis az adott n zárójel közül kell i -ből az a tagot kiválasztanunk, és a maradék $n-i$ zárójelből választunk ki b tagot. (Vagyis tényleg $0 \le i \le n$.) Márpedig tudjuk, hogy n különböző "valami" közül i -t kiválasztani pontosan $\binom{n}{i}$ -féleképpen lehet. □

Newton (és tőle függetlenül Bolyai János is) általánosította a fenti eredményt *tetszőleges* $\alpha \in \mathbb{R}$ kitevőre.

A 3.1. Tétel egy érdekes változata az alábbi, amely viszont teljes indukcióval igazolható könyebben (ezt is javasoljuk az Olvasónak átgondolni.)

2.35. Tétel: (Newton) *Tetszőleges n természetes számra és $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x -ben n -szer differenciálható függvényekre teljesül:*

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot f(x)^{(i)} \cdot g(x)^{(n-i)} \quad . \qquad \square$$

Lássuk a többtagúak hatványait:

2.36. Tétel: (Polinomiális tétel) *Tetszőleges $a_1, ..., a_s \in \mathbb{C}$ komplex számok és $s, n \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén fennáll az*

$$(a_1 + ... + a_s)^n = \sum_{\substack{0 \le k_1, \ldots, k_s \le n \\ k_1 + \ldots + k_s = n}} \binom{n}{k_1, ..., k_s} \cdot a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{k_s}$$

összefüggés.

Mint az előző alfejezetben láttuk, $s = 2$ esetén az $\binom{n}{k_1,k_2} = \binom{n}{k_1,n-k_1}$ polinomiális együttható éppen az $\binom{n}{k_1}$ binomiális együtthatóval egyezik meg, vagyis tényleg a 3.1. Tétel általánosításáról van szó. Az általunk adott bizonyítás is ennek megfelelően hasonló a 3.1. Tétel bizonyításához: ismét nem teljes indukciót, hanem csak a hatványozás definícióját használjuk.

Bizonyítás: Számoljuk ki a hatványt a tanult módon, amint a 2.34.Tétel bizonyításában is tettük (n -tagú szorzat):

$$(a_1 + ... + a_s)^n = (a_1 + ... + a_s) \cdot (a_1 + ... + a_s) \cdot ... \cdot (a_1 + ... + a_s) \ .$$

Minden tagot mindegyikkel megszorzunk,mégpedig az n zárójelből egyszerre: mindegyik zárójelből minden lehetséges módon kivesszük valamelyik a_i -t, és ezeket a tagokat szorozzuk össze egymással. Vagyis valóban $a_1^{k_1} \cdot ... \cdot a_s^{k_s}$ alakú tagokat kapunk ahol $0 \leq k_1, ..., k_s \leq n$ és $k_1 + ... + k_s = n$. A végén az azonos hatványokat összegyűjtjük egy $\sum$ -ba, amihez már csak azt kell meggondolnunk, hogy hányféleképpen kaphatunk $a_1^{k_1} \cdot ... \cdot a_s^{k_s}$ alakú szorzatokat rögzített, fenti tulajdonságú $k_1, ..., k_s$ kitevők esetén?

Az adott n zárójel közül kell tehát k_1 -ből az a_1 tagot kiválasztanunk, k_2 -ből az a_2 -őt, és így tovább, és a maradék k_s zárójelből az a_s tagot. (Persze $k_i = 0$ vagy $k_i = n$ is lehetséges, de ismételjük: $k_1 + ... + k_s = n$, és most a $k_1, ..., k_s$ kitevők rögzítettek.) E feladathoz legegyszerűbb, ha n zsetont elővesszünk, ezek közül k_1 -re a_1 -et írunk, k_2 -re a_2 -őt, és így tovább, a maradék k_s zsetonra pedig a_s -et. Sorbarakjuk a zsetonokat a zárójelek alá, és mindegyik zárójelből azt az a_i számot választjuk ki, amely a zsetonra van írva. Márpedig e zsetonok sorbarakása ismétléses permutáció. Így a lehetőségek száma a tanultak szerint éppen az $\binom{n}{k_1,...,k_s}$ kifejezés, amit most már joggal hívhatunk *polinomiális együttható*nak. $\square$

Speciális esetként már találkoztunk a *binomiális* ($s = 2$) együtthatókkal (ellenőrizzük!), használatos még a $s = 3$ esetén a *trinomiális* együttható elnevezés is.

2.6. Binomiális együtthatók összegei

Már a binomiális és polinomiális tételekből is egyszerűen nyerhetünk fontos összefüggéseket:

2.37. Tétel: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \ , \tag{i}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} = 0 \ . \tag{ii}$$

Bizonyítás: Newton (2.27) binomiális tétele alapján kapjuk, hogy

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1^i \cdot 1^{n-i}$$

illetve

$$(1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot 1^{n-i} \quad ,$$

valamint használjuk fel az $1+1=2$ és az $1-1=0$ összefüggéseket is. □

Más szóval, ha a Pascal háromszög (bármelyik) sorában összeadjuk az elemeket, 2 megfelelő hatványát kapjuk, illetve a tagokat váltakozó előjellel összadva 0 -át kapunk. Páros n esetén ez azonnal következik a binomiális együtthatók 3.9.Állítás (iii) -ben ismertetett szimmetria tulajdonságából, de páratlan n -re ez már nem olyan nyilvánvaló.

A fenti eredményt ismét lehetne teljes indukcióval is igazolni.

(i) kombinatorikai igazolása a véges mennyiségek közötti jobb eligazodást is segíti, ezért érdemes vele is megismerkedni:

(i) kombinatorikai bizonyítása: Hány részhalmaza van egy n -elemű halmaznak? Persze pontosan 2^n de részletesebben: vannak $0, 1, ..., i, ..., n$ elemű részhalmazok, melyekből rendre $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{i}$, ..., $\binom{n}{n}$ van. Egyazon mennyiséget kétféleképpen számolva ugyanaz (általában) az eredmény, vagyis $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$, amint állítottuk. □

A 3.12. Tétel (2.26) összefüggésében a $\binom{\cdot}{\cdot}$ binomiális együtthatók "felső" tagja szerint, míg jelen Tételben az alsó tagok szerint történt az összegezés.

További egyenlőségeket nyerhetünk, ha az analízis fegyvereit is bevetjük. Ismételjük: a bizonyításban ismertetett módszer az, amit elsősorban az Olvasó figyelmébe ajánlunk!

2.38. Tétel: *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén*

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1} \tag{i}$$

és

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{i} = \frac{2^{n-1}}{n+1} \ . \tag{ii}$$

Bizonyítás: Megint Newton binomiális tételéből indulunk ki, de honnan eredhetnek az i szorzó- ill. osztótényezők? Az x^i függvények *deriválásából* ill. *integrálásából*! Ezért, mivel n rögzített, tekinthetjük az

$$f(x) := (1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i$$

függvényt ahol $x \in [0,1]$, és most kivételesen legyen $0^0 = 1$. Ekkor az egyenlőség mindhárom oldalát deriválva ill. integrálva kapjuk, hogy

$$f'(x) := n \cdot (1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i \cdot x^{i-1}$$

és

$$\int_0 f(x) := \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \frac{x^{i+1}}{i+1}$$

(az egyértelműség miatt vettünk 0-ban eltűnő integrált). A fenti egyenlőségekbe x helyére 1-et helyettesítve kapjuk a bizonyítandó összefüggéseket.□

További azonosságok felfedezéséhez tekinthetjük még a

$$g(x) := (1-x)^n$$

függvényt is, komplex számokat is alkalmazhatunk, további ötleteket találunk még az $[SzI,' 97]$ feladatgyűjteményben is.

2.7. A Stirling formula

Már eddig is gyakran kellett alkalmaznunk képleteinkben az $n!$ mennyiséget, sőt a binomiális együtthatók "fő alkotórészének" is tekinthetjük.

Ezért is hasznos számunkra a J.Stirling által felfedezett alábbi közelítő formula, mely $n!$ nagyságrendjét nagyon is pontosan adja meg:

2.39. Tétel (J.Stirling[14] "- formula"): *Elég nagy*[15] $n \in \mathbb{N}$ *természetes szám esetén*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \tag{2.28}$$

sőt kicsit pontosabban

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{12n}} \quad . \quad \square \tag{2.29}$$

Mi elsősorban a binomiális együtthatók, $\binom{n}{k}$ és $\binom{n}{n/2}$ értékének, valamint $\mathcal{O}(2^n)$ és $\mathcal{O}(n!)$ futásidejű algoritmusok összehasonlítására használjuk a fenti formulákat.

2.8. Nagyméretű feladatok

A kombinatorikában a *kisméretű* (pármillió alatti) végeredmények a meglepőek, most néhány szemléletes példát sorolunk fel a nagyságrendek érzékeltetésére. A feladatok megoldása és elemzése a jegyzet végén található.

2.40. Példa Egy n -jegyű N szám prímtényezős felbontását keressük. Egy tanult módszer: a páratlan számokat próbáljuk ki $\sqrt{N}$ -ig. Hány osztást kell elvégeznünk?

a) Ez mennyi idő lenne $n = 20$, $n = 30$, $n = 40$ és $n = 50$ esetén egy 5 GHz -es gépen futtatva (ha csak az osztásokat számítjuk egy-egy lépésnek)? (A mai titkosírásoknál, pl. https -nél többszázjegyű számokkal kell számolni.)

b) Mennyire csökkenne a futásidő, ha a $\sqrt{N}$ alatti prímszámokat egy tömbben (táblázatban) tárolnánk, és csak e prímszámokat próbálnánk ki ?

2.41. Példa a) Hány szorzást kell elvégeznünk egy $n \times n$ -es mátrix determinánsának kiszámításához (a definíció szerint)?

Ez mennyi idő lenne n=15, n=20 és n=25 esetén egy 5 GHz -es gépen futtatva (ha csak a szorzásokat számítjuk egy-egy lépésnek) ?

Becsüljük meg a kapott eredmény nagyságrendjét $n \to \infty$ esetén!

---

[14] James Stirling (1692-1770) skót matematikus, elsősorban statisztikával, végtelen sorok konvergenciájával, mechanikával foglalkozott.

[15] függvények aszimptotikájának pontos definícióját analízisben tanuljuk, itt most nem foglalkozunk vele.

b) Ugyanekkora mátrixok szorzásához, illetve n -edik hatványának kiszámolásához hány szorzást kell elvégeznünk? Ezeket is számoljuk át mp –re, 5 GHz –es gépet feltételezve !

2.42. Példa Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges p -változós, n -szer deriválható függvény.

a) Hányféle n -edik deriváltja van? (Ne feledjük Schwarz tételét!)

b) Hány tagból áll az $f(x)$ függvény N -edrendű Taylor polinomja?

c) Hány n -edik deriváltja van az olyan $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényeknek, melyekre nem igaz Schwarz tétele (azaz $D_i g \neq D_j g$ ha $i \neq j$) ?

2.43. Példa Tekintsünk egy n -változós f logikai függvényt.

a) Hány sorból áll igazságtáblázata? Mennyi idő alatt értékelné ki egy 5 GHz -es gép, ha minden órajel alatt egy-egy sort tudna kiértékelni ?

b) Ha feltesszük, hogy az f függvény értékeinek kb. 50% -a igaz, akkor hány karakterből áll az f függvény Diszjunktív Normálforma (DNF) alakban?

Mennyi ideig nyomtatná a karaktereket egy 5 GHz –es gép, ha minden órajel alatt egy-egy karaktert nyomtatna ki?

Hány oldalon illetve hány kötetben (hány méter polcon) férne ki ez a DNF 4 pt -os betűméretben, 152 sor, soronként 225 karakter, "biblia"-papíron 1500lap = 4cm ? (Indexes vátozókat használjunk: $p_1 \ldots p_n$, vagyis mindegyik változóra két-két karaktert számoljunk. A tagadás műveletét jelöljük felülvonással, vagyis ez nem külön karakter. Lehető legkevesebb zárójelet használjunk: $(\vee \ldots \vee) \wedge (\vee \ldots \vee) \ldots$ alakban.)

c)* Átlagosan milyen hosszú egy DNF, ha csak a legfeljebb 50% -ban igaz függvényeket tekintjük ?

2.44. Példa o) Hány egyszerű gráf van n csúcson ?

a) Két n -elemű halmaz között hány bijekció van ?

b) Ha "favágó" -módon két n -csúcsú egyszerű gráf izomorfiáját úgy keresnénk, hogy csúcshalmazaik között az összes bijekció éltartóságát ellenőriznénk, akkor ez mennyi időt venne igénybe egy 5 GHz –es gépen, ha minden órajel alatt egy-egy él-ellenőrzést végezne?

2.45. Példa o) Egy n -elemű és egy k -elemű halmaz között hány tetszőleges függvény van?

a) A "favágó" módszer alkalmazásával mennyi idő alatt tudnánk eldönteni egy n -csúcsú gráfról, hogy 3-kromatikus -e, azaz $k = 3$ jó -e (5 GHz-es gép, minden órajelben $\ldots$) ?

b) Mi a helyzet a $k = 2$ esetben ?

2.46. Példa Hány tagból áll az $(x_1+x_2+...+x_p)^n$ kifejezés (a polinomiális tétel szerint kifejtve)? Ez mennyi például n=10 és p=5 esetén?

2.47. Példa Hányféleképpen lehet az $x_1 - x_2 - \ldots \ - x_n$ kifejezést zárójelezni? Mennyi ideig nyomtatná a végeredeményt egy 5 GHz-es gép (minden órajelben ...) ?

2.48. Példa Az 1,2,...,100 számok közül hányféleképpen lehet kiválasztani hármat úgy, hogy a kiválasztott számok összege osztható legyen 3-mal? (XVII. Bátaszéki matematikaverseny, országos döntő 7.oszt., 2006.)

2.49. Példa Tekintsük a természetes számokon a következő (végtelen) gráfot: $K = (N, F)$ ahol $(m, n) \in F$ ha m és n relatíve prímek. Mutassuk meg, hogy ekkor tetszőleges $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor feszített részgráfja K -nak, ha G tetszőleges $P \in V$ csúcspontjára a $G \setminus \Gamma(P)$ gráf kromatikus száma véges (itt $\Gamma(P)$ jelöli P szomszédainak halmazát G -ben, a feladat általánosítását $[SzI,'91]$ -ben találhatjuk).

2.50. Példa Hány tagból áll a logikai szitaformula n részhamaz esetén?

2.9. Gyakorló feladatok

A szerző $[SzI,'97]$ feladatgyűjteményének 5. és 6., de még inkább a 7. és 8. fejezeteiben sok változatos és megoldással ellátott feladatot találunk gyakorlás céljára.

Ismételten felhívjuk a figyelmet, hogy hiába kevés elméleti eredménnyel találkoztunk jelen fejezetben, de a gyakorlati problémák megoldásához szükséges ügyességet csak hosszú hónapok alapos gyakorlásával szerezhetjük meg! A kezdők örök dilemmája és hibalehetősége: "összeadni" vagy "összeszorozni" "kell", lehet-e egyáltalán valamelyik képletet használni és melyiket, vagy csak "gyalogosan" fel kell sorolni az összes lehetőséget, esetleg valamely szempontok szerint csoportosítva, kicsit megkönnyítve a tengernyi eset felsorolását, és a legfontosabb: Mindent összeszámoltunk? Semmit sem számoltunk kétszer? Csak a halmaz elemeit számoltuk meg[16] ?

2.51.Feladat: Igazoljuk az alábbi állításokat[17] *teljes indukcióval* :

/0/

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

(a címlapon levő ábra ezt az összefüggést szemlélteti).

---

16) Lásd a fejezet legelején írt (2.1.) jótanácsunkat !

17) Természetes számok *bármely hatványainak összegére* a fentihez hasonló zárt formulák (képletek) "gyártását" $[SzI,'00]$ -ban tanulhatjuk meg.

/1/

$$1^3+2^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad .$$

/2/ Ha $n \geq 2$, akkor

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n} \geq \frac{n}{2} \quad .$$

/3/

$$\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$$

/4/

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k^2 = (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

/5/ Ha $a \in \mathbb{R}$ olyan valós szám, amelyre $a+\frac{1}{a}$ egész szám, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $a^n+\frac{1}{a^n}$ is egész szám.

/6/ n egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre osztja.

/7/ Az $1, 2, ..., 2^n$ számok két azonos méretű és diszjunkt A, B csoportba oszthatók úgy, hogy az egyes csoportokban levő számok összege azonos legyen.

/8/ Az első n páratlan természetes szám összege pontosan n^2 .

/9/

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

/10/

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \text{ahol} \quad H_k := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}$$

(ún. "harmonikus" számok[18])

/11/

$$H_1 + ... + H_n = (n+1) \cdot H_n - n$$

/12/

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} \quad > \quad 2(\sqrt{n+1}-1)$$

[18] Euler tétele szerint $\lim_{n\to\infty}(H_n - ln(n)) = C$ ahol $C \approx 0,5772$ az ún.Euler-féle konstans.

/13/

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$$

/14/

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{(i+1)!}=1-\frac{1}{n!}$$

/15/

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot...\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

/16/ Tetszőleges $a,q\in\mathbb{C}$ rögzített komplex számokra

$$\sum_{i=0}^{n}a\cdot q^i=a\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

(mértani sorozat összegképlete).

/17/ Minden n -elemű halmaznak 2^n részhalmaza van, azaz

$$|\mathcal{P}(A)|=2^n \quad ha \quad |A|=n$$

/18/

$$n<2^n<n!$$

/19/ Tetszőleges $A_1,...,A_n$ halmazokra

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

és

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

(általánosított De Morgan szabályok)

/20/ A $2^n\times 2^n$ méretű sakktábla bal felső mezőjét elhagyva a maradék tábla mezői hiánytalanul és egy rétegben lefedhetők 3 négyzetből álló L alakú lapocskákkal.

/21/ n^3-n osztható 3 -mal, azaz $3\,|n^3-n$.

/22/ Tetszőleges $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ pozitív valós számokra

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 \cdot ... \cdot a_n}$$

(számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség).

/23/ Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$ Forintot ki lehet fizetni 4 - és 5 - Forintos érmékkel.

2.52. Feladat: Hány nemnegatív megoldása van az

$$y_1 + ... + y_k = n$$

egyenletnek tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ szám esetén ?

2.53. Feladat: Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy konvex n -szög átlóinak a sokszög belsejében?

2.10. A feladatok megoldásai

2.40. a) Ha az N szám n -jegyű, akkor értéke körülbelül $N \approx 10^n$ (pontosabban $10^{n-1} \leq N < 10^n$, de nem érdemes ezzel a számításokat bonyolítani). Ekkor az osztások száma $\sqrt{N}\ /2$. Ez és 5GHz és
n=20 esetén $5 \cdot 10^9$ lépés = 1 mp ,
n=30 esetén $5 \cdot 10^{14}$ lépés = 10^5 mp $\approx$ 27 óra 46 perc,
n=40 esetén $5 \cdot 10^{19}$ lépés = 10^{10} mp $\approx$ 317 év 35 nap 18 óra,
n=50 esetén $5 \cdot 10^{24}$ lépés = 10^{15} mp $\approx$ 31.7 millió év ... .

b) Jelöljük tetszőleges x szám esetén $\pi(x)$ -el az x -nél kisebb prímszámok számát! A "Nagy Prímszámtétel" (Hadamard és de la Vallée Poussin, 1896) szerint $\pi(x) \approx x/\ln(x)$. Ekkor az osztások száma $\pi\left(\sqrt{N}\right) \approx \sqrt{N}/\ln\left(\sqrt{N}\right)$. Ez 5GHz és
n=20 esetén $\approx 4.3 \cdot 10^8$ lépés < 1 mp ,
n=30 esetén $\approx 2.9 \cdot 10^{13}$ lépés $\approx$5790 mp $\approx$1 óra 36 perc,
n=40 esetén $\approx 2.2 \cdot 10^{18}$ lépés $\approx 4.4 \cdot 10^8$ mp $\approx$13 év 281 nap,
n=50 esetén $\approx 1.4 \cdot 10^{23}$ lépés $\approx 1.7 \cdot 10^{14}$ mp $\approx$5.5 millió év ... .

2.41. A szorzások száma $n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + ... + n!$, vagy másképpen: $n! \cdot (1 + 1/1! + 1/2! + ... + 1/(n-1)!)$, a Stirling -formula szerint ez aszimptotikusan:

$\approx n^n\sqrt{2\pi n}/e^n \cdot (1 + 1/1! + 1/2! + ... + 1/(n-1)!) \approx (n/e)^n \cdot e \cdot \sqrt{2\pi n}$.

n=15 (és 5GHz) esetén ez kb.

$15^{15}\sqrt{30\pi}/e^{14} \approx$ 3 534 937 201 323 lépés
= 706 986 mp ≈ 196 óra ,

n=20 esetén $20^{20}\sqrt{40\pi}/e^{19} \approx$ 6 585 813 029 813 853 679 lépés
= 1 317 162 605 962 mp ≈ 365 878 501 óra ≈ 41 767 év !!!

n=25 esetén $25^{25}\sqrt{50\pi}/e^{24} \approx 3{,}35299 \cdot 10^{24}$ lépés
$\approx 6{,}70598 \cdot 10^{14}$ mp ≈ 21 264 542 év !!! !!!

2.42. a) Egy derivált $D_{k1}D_{k2}...D_{kp}f$ alakú, ahol a $0 \le k_1, k_2, ..., k_p \le n$ egész számokra teljesül, hogy $k_1 + k_2 + ... + k_p = n$. Az ilyen k_i számok száma ismétléses kombináció (ld.pl. $[SzI,'97]$ 8.6.b) feladat), azaz

$$C_p^{n\ (ism)} = \binom{p+n-1}{p-1} \quad .$$

b) A Taylor polinom tagjainak száma

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{p+n-1}{p-1} = \binom{p+N}{p} > \frac{N^p}{p!} \quad .$$

c) Ha Schwarz tétele nem teljesül, akkor a deriváltak lehetséges száma ismétléses variáció: $V_p^{n\ (ism)} = p^n$.

2.43. a) Az igazságtáblázat 2^n sorból áll.
n=10 esetén ez 2^{10} / 5GHz = 1024/5*10^9 mp = 2,048 * 10^{-7} mp,
n=20 esetén ez 2^{20} / 5GHz ≈ 2,097 * 10^{-4} mp,
n=30 esetén ez 2^{30} / 5GHz ≈ 0,215 mp,
n=40 esetén ez 2^{40} / 5GHz ≈ 219,902 mp ≈ 3.6 perc,
n=50 esetén ez 2^{50} / 5GHz ≈ 225 180 mp ≈ 62.5 óra ≈ 2.6 nap,
n=60 esetén ez 2^{60} / 5GHz ≈ 2,306*10^8 mp ≈ 6 405 óra ≈ 7 év 3.5 hónap,
n=70 esetén ez 2^{70} / 5GHz ≈ 2,361*10^{11} mp ≈ 6,559*107 óra ≈ 7 508 év!
n=80 esetén ez 2^{80} / 5GHz ≈ 2,418*10^{14} mp ≈ 7 688 020 év ! . . .

b) Minden igaz sorhoz egy $(p_1\wedge \ldots \wedge p_n)\vee$ jelsorozat tartozik (a tagadás műveletét nem számoljuk), ami $2 + 2n + n - 1 + 1 = 3n + 2$ hosszú. Mivel a DNF $2^n/2$ igaz sort tartalmaz, ezért a DNF hossza $2^n \cdot (3n + 2)/2$.

n=20 esetén ez 2^{19}*62 / 5GHz ≈ 0,006 mp,

n=30 esetén ez 2^{29}*92 / 5GHz $\approx$ 9,89 mp,
n=40 esetén ez 2^{39}*122/ 5GHz $\approx$ 13 414 mp $\approx$ 3 óra 43,5 perc,
n=50 esetén ez 2^{49}*152/ 5GHz $\approx$ 1,711*10^7 mp $\approx$ 6.5 hónap,
n=60 esetén ez 2^{59}*182/ 5GHz $\approx$ 2,098*10^{10} mp $\approx$ 667 év 2.5 hónap,
n=70 esetén ez 2^{69}*212/ 5GHz $\approx$ 2,503*10^{13} mp $\approx$ 795 830 év ! ,
n=80 esetén ez 2^{79}*242/ 5GHz $\approx$ 2,926*10^{16} mp $\approx$ 930 250 459 év ! ,
a karakterek száma pedig:
n=20 esetén 2^{19}* 62 / (152*225) $\approx$ 15,3 oldal,
n=30 esetén 2^{29}* 92 / (152*225) $\approx$ 1 444 214 oldal $\approx$ 38,5 m,
n=40 esetén 2^{39}*122/ (152*225) $\approx$ 1,96*10^9 oldal $\approx$ 52,26 km,
n=50 esetén 2^{49}*152/ (152*225) $\approx$ 2,5*10^{12} oldal $\approx$ 16 680 km,
n=60 esetén 2^{59}*182/ (152*225) $\approx$ 3*10^{15} oldal $\approx$ 81 805 736 km,
n=70 esetén 2^{69}*212/ (152*225) $\approx$ 3,66*10^{18} oldal $\approx$ 97 577 163 194 km,
n=80 esetén 2^{79}*242/ (152*225) $\approx$ 4,28*10^{18} oldal $\approx$ 1,14*10^{14} km
$\approx$ 0,012 fényév !!! -nyi (vastag) könyv.

2.46. A 2.42/a) feladat alapján a kifejezés $C_p^{n\ (ism)} = \binom{p+n-1}{p-1}$ tagból áll.

2.47. A lehetőségek száma éppen az n-edik Catalan szám ($[SzI,'00]$) :

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \approx \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}} \ ,$$

a közelítés a Stirling -formulával történt.
n= 3 esetén ez = 2 lehetőség,
n= 5 esetén ez = 42 lehetőség,
n= 8 esetén ez = 1430 lehetőség,
n=10 esetén ez = 16 796 lehetőség,
n=20 esetén ez kb. $\approx$ 6,56*10^9 lehetőség.

2.48. A felsorolt számokat 3-mal való osztási maradékaik szerint csoportosítjuk: 33 szám maradéka 0, 34 maradéka 1 és 33 maradéka 2. A kiválasztott számok összege akkor osztható 3-mal, ha három azonos maradékú, vagy egy 1-es, egy 2-es és egy 0-ás maradékú számot választottunk ki. Így a lehetőségek száma $2 \cdot \binom{33}{3} + \binom{34}{3} + \binom{33}{1}\binom{33}{1}\binom{34}{1} = 53\ 922$.

2.50. A 2.37. Tétel alapján a tagok száma 2^n.

2.52. A feladat éppen egy *ismétléses kombináció:* az egyenlet jobb oldalán levő n -et kell k részre szétosztanunk az $y_1, ..., y_k$ változók között, vagyis k különböző név közül kell visszatevéssel n -szer húznunk, így a válasz $C_k^{n,(ism)} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

2.53. $\binom{n}{4}$ mert a sokszög bármely négy csúcsát kiválasztva *pontosan* egyféleképpen (keresztben) tudjuk őket átlókkal összekötni úgy, hogy az átlóknak a sokszög belsejében legyen metszéspontjuk.

2.11. Történeti megjegyzések

A matematikai indukció módszerét *legelőször* **Francesco Maurolico** (1494-1575) olasz matematikus használta egyik könyvében annak igazolására hogy az első n páratlan szám összege pontosan n^2 (HF!). Maurolico egyébként geometriával és optikával foglalkozott behatóan.

Blaise Pascal (1623-1662) francia matematikus és fizikus nevéhez fűződik a módszer legelső *pontos* leírása. (Pascal -t a 3. fejezetben, a 3.10.Állításban bemutatott "Pascal-háromszög" kapcsán méltatjuk.)

Giuseppe Peano (1858-1932) olasz matematikus az aritmetika és a számelmélet (róla elnevezett) axiómarendszerében a Teljes Indukciót axiómának tünteti fel, és megmutatja, hogy ezek segítségével az aritmetika és a számelmélet valóban teljes egészében felépíthetők.

Gottlob Frege (1848-1925) német matematikus igazolta először 1884 -ben a teljes indukció módszerének helyességét (azaz a 2.8.Tételt), a halmazelmélet axiómáinak (ZFC) felhasználásával.

Gerhard Gentzen (1909-1945) német matematikus, ő vezette le először az aritmetika (PA = Peano Axiómarendszer) ellentmondástalanságát a halmazelmélet (ZFC) axiómáiból.

Pólya György (1887-1985 magyar matematikus) az ismétléses permutációk elméletét továbbfejlesztve, komoly algebrai és kombinatorikai segédeszközök mesteri ötvözésével rendkívül hatékony összeszámlálási módszert dolgozott ki, amely-lyel kémiai vegyületek különböző izomerjeinek számát és egyéb kombinatorikai feladatokat tudott sikeresen megoldani. Módszeréről Harris-Hirst-Mossinghoff könyvében a "*Pólya's Theory of Counting*" fejezetben, vagy Pólya és Read eredeti cikkeiben olvashatunk bővebben.

A *Binomiális Tételt* többek között már **Omar Khajjám** (1048-1131) perzsa és **Hiasszedin** arab matematikusok, sőt *Blaise Pascal* (1623-1662) is ismerték. Newton érdeme viszont a tétel általánosítása, mely eredményeket az alfejezet többi tételében ismertettünk.

Blaise Pascal (1623-1662) francia matematikus, fizikus aki filozófiával és irodalommal is behatóan foglalkozott. Többek között a valószínűségszámításban, projektív geometriában, differenciál- és intergrálszámításban, számelméletben vannak fontos eredményei, a teljes indukció módszerét ő határozta meg először precízen. 16 évesen már dolgozata jelent meg a kúpszeletekben írható hatszögekről.

Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) francia zenész, mérnök, politikus, mindössze az 1771-72 években foglalkozott matematikával.

2.12. Hivatkozott irodalom

[$SzI,'91$] **Szalkai István**: *An Open Problem Concerning Spanned Subgraphs of Infinite Graphs*, Preprint, 1991.
http://math.uni-pannon.hu/~szalkai/CNo13.pdf

[$SzI,'97$] **Szalkai István**: *Diszkrét matematikai feladatgyűjtemény*, Veszprémi Egyetemi Kiadó, 1997.

[$SzI,'00$] **Szalkai István**: *Diszkrét matematika és algoritmuselmélet alapjai*, Veszprémi Egyetemi Kiadó, 2000.