2016. június 6. II. félév Név:

1. Mikor mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban? Létezik-e olyan $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek egy $a \in$dom(f) pontban az összes irány menti deriváltja 1?

Ha az a belső pontja a dom(f)-nek, és létezik olyan $A \in \mathbb{R}^p$, amelyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \langle A, x-a \rangle}{|x-a|} = 0.$$

Nem létezik, mert ha $D_u f(a) = 1$, akkor $D_{-u} f(a) = -1$.

1. Mit értünk egy $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz külső és belső mértékén? Egy $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz külső mértéke 0. Mérhető-e a H halmaz?

$$\lambda_b^p(H) := \begin{cases} \sup\{\lambda^p(A) \mid A \in B(H)\}, \text{ ha } B(H) \neq \emptyset \\ 0, \text{ különben} \end{cases},$$

ahol

$$B(H) := \{A \subset H \mid A \text{ elemi halmaz}\}.$$

$$\lambda_k^p(H) := \inf\{\lambda^p(A) \mid A \in K(H)\},$$

ahol

$$K(H) := \{H \subset A \mid A \text{ elemi halmaz}\}.$$

Mivel $\lambda_b^p(H) \le \lambda_k^p(H)$, ezért $\lambda_k^p(H) = 0$-ból $\lambda_b^p(H) = 0$ következik, így a H mérhető.

1. A gyökkritérium megfogalmazása (nem határértékkel!). Igaz-e, hogy minden Leibniz típusú sor feltételesen konvergens?

Tekintsük a $\sum a_n$ sort. Ha létezik olyan $0 < \gamma < 1$ és $k \in \mathbb{N}$, hogy $\sqrt[n]{|a_n|} \le \gamma$ bármely $n \ge k$ esetén, akkor a sor abszolút konvergens. Ha végtelen sok n-re $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$, akkor a sor divergens.

Nem, pl. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.

1. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladat megoldhatóságáról szóló állítás megfogalmazása. Létezik-e az $x''(t) = 0$ differenciálegyenletnek olyan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldása, amelyre $\varphi(1) = 1$ és $\varphi(2) = -1$?

Tekintsük az

$$\left.\begin{array}{c} x'(t) + p(t)x(t) = q(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right\}$$

lineáris diffderenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladatot, ahol $p, q : I \to \mathbb{R}$ folytonosak, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$. Legyen

$$v := \int_{(I,t_0)} p.$$

A kezdetiértk feladat egyértelműen megoldható és a teljes megoldása

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{(I,t_0)} q(t) \exp(v(t))\, dt \right) \exp(-v(t)), \quad t \in I.$$

Összes $\mathbb{R}$-en értelmezett megoldás: $x(t) = at + b$, $t, a, b \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} a + b = 1 \\ 2a + b = -1 \end{array}\right\}$$

megoldása $a = -2$, $b = 3$.