

1. Ha $a \in \text{dom}(f)$, és az $f(a)$ bármely V környezetéhez van az a -nak olyan $U(V)$ környezete, amelyre $f(U(V)) \subset V$.

Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$|pr_1(x, y) - pr_1(a, b)| = |x - a| \leq |(x, y) - (a, b)|, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

miatt $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ választható.

2.

$$D^n f(a)(h) := \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_p^n} D_{i_n} \dots D_{i_1} f(a) h_{i_n} \dots h_{i_1}$$

$$D^1 f(a)(h) = \sum_{k=1}^n D_k f(a) h_k = \langle \text{grad} f(a), h \rangle$$

3. Tekintsük a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ ($x \in \mathbb{R}$) hatványsort, és tfh. $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ létezik a $[0, \infty]$ -ben. Legyen

$$r := \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha}, & \text{ha } 0 < \alpha < \infty \\ 0, & \text{ha } \alpha = \infty \end{cases}.$$

Ha $r = \infty$, akkor a hatványsor bármely pontban abszolút konvergens, ha $0 < r < \infty$, akkor a hatványsor $|x-a| < r$ esetén abszolút konvergens, míg $|x-a| > r$ esetén divergens, ha pedig $r = 0$, akkor a hatványsor pontosan $x = a$ -nál (abszolút) konvergens.

Mivel a konvergencia intervallum szimmetrikus az a -ra, ezért a hatványsor abszolút konvergens a $] -2a, 4a[$ intervallum pontjaiban, így a $-a$ -nál is.

4. Legyen $H \subset [0, \infty[\times [\alpha, \alpha + 2\pi]$ mérhető alkalmasan választott $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén. Ha $f \in R_2(P(H))$, akkor

$$\int \int_{P(H)} f(x, y) dx dy = \int \int_H f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r dr d\varphi.$$

$$(-3, -2) = \sqrt{13} \left(\cos \left(\arctg \left(\frac{2}{3} \right) + \pi \right) + \sin \left(\arctg \left(\frac{2}{3} \right) + \pi \right) \right)$$