2. FEJEZET

KOMPLEX SZÁMOK

Miről szól ez a fejezet?

Tekintsük az $x^2 - 4x + 13 = 0$ egyenletet. Ennek - mint tudjuk - a valós számok körében nincsen megoldása, mert a diszkriminánsa: $16 - 52 = -36$ negatív.

"Hozzunk létre" azonban egy $2 + 3\mathbf{i}$ alakú számot, ahol az **i** betűvel egy olyan számot jelöltünk aminek a négyzete -1, azaz $\mathbf{i}^2 = -1$ (ilyen **i** számunk eddig nem volt, most vezettük be). Fogadjuk ezt el normális számnak; végezzünk vele műveleteket úgy mint a valós számokkal, azzal a megkötéssel, hogy $\mathbf{i}^2 = -1$.

Helyettesítsük be a $2 + 3\mathbf{i}$ számot a fenti egyenlet baloldalába, a

$$(2 + 3\mathbf{i})^2 - 4(2 + 3\mathbf{i}) + 13$$

alakú kifejezéshez jutunk. Végezzük el a műveleteket (összeg négyzete, konstanssal való szorzás):

$$4 + 12\mathbf{i} + 9\mathbf{i}^2 - 8 - 12\mathbf{i} + 13 = 4 - 9 - 8 + 13 = 0$$

Azt tapasztaljuk, hogy a $2 + 3\mathbf{i}$ szám kielégíti a másodfokú egyenletet, hiszen

$$(2 + 3\mathbf{i})^2 - 4(2 + 3\mathbf{i}) + 13 = 0.$$

Könnyen meggyőződhet az olvasó, hogy $2 - 3\mathbf{i}$ is kielégíti az egyenletet. Tehát, ha számfogalmunkat kibővítjük ilyen alakú számokkal, akkor a másodfokú egyenletnek mindig van megoldása.

Az $a + b\mathbf{i}$ alakú számokat, ahol a, b valósak (az előbb $a = 2$, $b = 3$ volt) *komplex számoknak* nevezzük.

Az alábbiakban ezekkel az új számokkal foglalkozunk. Megmutatjuk majd, hogy egy $a + b\mathbf{i}$ komplex szám $r(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)$, ill. $re^{\mathbf{i}\varphi}$ alakban is felírható és mindegyik alakra definiáljuk majd az alapműveleteket.

2.1 A komplex szám fogalma (az algebrai alak)

Mint ismeretes a valós számkörben nem tudjuk értelmezni a $\sqrt{-1}$ "számot", hiszen ennek négyzete: -1. (A valós számok között nincs olyan szám, amelynek négyzete negatív.) Tekintsük ennek ellenére a $\sqrt{-1}$ et "számnak", és jelöljük **i**-vel; azaz legyen $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. Ez a "szám" a **képzetes immaginárius egység**. Az **i** "szám" tehát olyan, hogy $\mathbf{i}^2 = -1$ (négyzete: -1).

Legyen a és b két valós szám. Az $a + b\mathbf{i}$ alakú "számot" **komplex számnak** nevezzük. (Pl. $2{,}5 + 3\mathbf{i}$; $6 - 5{,}2\mathbf{i}$ stb.) Az a számot a komplex szám **valós**

részének, b-t pedig **képzetes részének** hívjuk. Jelöljük az $a + b\mathbf{i}$ komplex számot röviden z-vel. Ezt az alakot a komplex szám **algebrai alakjának** hívjuk. Később két további alakját is megadjuk a komplex számoknak.

2.1.1 Műveletek komplex számokkal

Definiáljunk műveleteket a komplex számokra a következőképpen. Legyen: $z_1 = a + b\mathbf{i}$; $z_2 = c + d\mathbf{i}$

a) *Összeadás:*

$z_1 + z_2 = (a + b\mathbf{i}) + (c + d\mathbf{i}) = (a + c) + (b + d)\mathbf{i}$ (Az összeg valós része a valós részek, a képzetes része a képzetes részek összege.)

PÉLDA. Legyen $z_1 = 3 - 2\mathbf{i}$, $z_2 = 4 + 3\mathbf{i}$, akkor $z_1 + z_2 = 7 + \mathbf{i}$

b) *Kivonás*:

$z_1 - z_2 = (a + b\mathbf{i}) - (c + d\mathbf{i}) = (a - c) + (b - d)\mathbf{i}$ (A különbség valós része a valós részek, a képzetes része a képzetes részek különbsége.)

PÉLDA. Legyen $z_1 = 5 + 2\mathbf{i}$, $z_2 = 1 + 3\mathbf{i}$, akkor $z_1 - z_2 = 4 - \mathbf{i}$

c) *Szorzás*:

$z_1 \cdot z_2 = (a + b\mathbf{i})(c + d\mathbf{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i}$

MEGJEGYZÉS. A képletet nem kell megjegyezni. Úgy kaptuk, hogy $(a + b\mathbf{i})$-t "formálisan" megszoroztuk $(c + d\mathbf{i})$ -vel és figyelembe vettük, hogy $\mathbf{i}^2 = -1$. Konkrét számításoknál is így érdemes elvégezni a műveletet.

PÉLDA. Legyen $z_1 = 2 + 3\mathbf{i}$, $z_2 = 4 + 5\mathrm{i}$, akkor

$z_1 z_2 = (2x4 - 3x5) + (2x5 + 3x4)\mathbf{i} = -7 + 22\mathrm{i}$. Vagy formális szorzással:

$z_1 z_2 = (8 + 12\mathbf{i} + 10\mathbf{i} + 15\mathbf{i}^2) = 8 - 15 + 22\mathbf{i} = -7 + 22\mathbf{i}$.

d) *Osztás*:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b\mathbf{i}}{c + d\mathbf{i}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathbf{i}$$

MEGJEGYZÉS. Ezt a képletet sem kell megjegyezni. Úgy kaptuk, hogy mind a számlálót mind a nevezőt beszoroztuk $c - d\mathbf{i}$-vel. Konkrét számításoknál is így érdemes elvégezni a számításokat.

PÉLDA. Legyen $z_1 = -2 + 3\mathbf{i}$, $z_2 = 4 - 5\mathbf{i}$, akkor $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-2 + 3\mathbf{i}}{4 - 5\mathbf{i}} = -\dfrac{23}{41} + \dfrac{2}{41}\mathbf{i}$

vagy a törtet $4 + 5\mathbf{i}$ - vel szorozva:

$$\frac{-2 + 3\mathbf{i}}{4 - 5\mathbf{i}} \cdot \frac{4 + 5\mathbf{i}}{4 + 5\mathbf{i}} = \frac{-8 + 12\mathbf{i} - 10\mathbf{i} + 15\mathbf{i}^2}{16 - 20\mathbf{i} + 20\mathbf{i} - 25\mathbf{i}^2} = \frac{-8 - 15 + 2\mathbf{i}}{16 + 25} - = \frac{-23}{41} = \frac{2}{41}\mathbf{i}$$

2.1.2 Komplex szám konjugáltja

A $z = a + b\mathbf{i}$ komplex szám **konjugáltja** a $\bar{z} = a - b\mathbf{i}$ komplex szám.

A konjugáltak összege: $z + \bar{z} = (a + b\mathbf{i}) + (a - b\mathbf{i}) = 2a$,

szorzata: $z \times \bar{z} = (a + b\mathbf{i})(a - b\mathbf{i}) = a^2 - b^2$ valós szám.

Az alapműveletek birtokában könnyen meg tudjuk mutatni, hogy a komplex számok jól használható "értelmesen" általánosított számok.

Vegyük az $x^2 - 4x + 13 = 0$ másodfokú egyenletet, és "helyettesítsük" be a $2 + 3\mathbf{i}$ komplex számot:

$$(2 + 3\mathbf{i})^2 - 4(2 + 3\mathbf{i}) + 13 = 4 + 12\mathbf{i} - 9 - 8 - 12\mathbf{i} + 13 = 0$$

Azt kaptuk, hogy $2 + 3\mathbf{i}$ kielégíti másodfokú egyenletünket (azaz gyöke az egyenletnek).

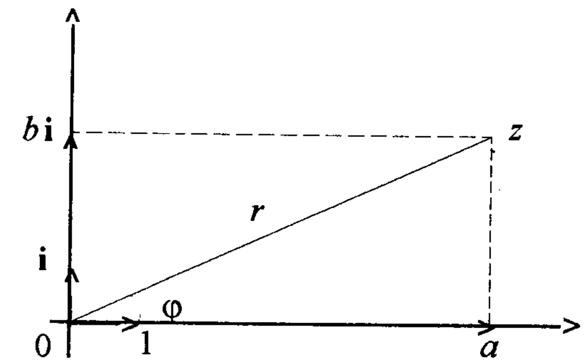
Érdekes dolgot figyelhettünk meg. Egyenletünk diszkriminánsa negatív (−36) tehát a valós számok között nincsen gyöke. Az $x_1 = 2 + 3\mathbf{i}$ komplex szám viszont gyöke az egyenletnek. (Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk, hogy az $x_2 = 2 - 3\mathbf{i}$ komplex szám is gyöke az egyenletnek).

Érdemes tehát kibővíteni a valós számkört a komplex számokkal, mert így a negatív diszkriminánsú másodfokú egyenletnek is van gyöke. (Természetesen csak a **K** komplex számok körében.) A gyököt úgy kapjuk meg, hogy a másodfokú egyenlet "megoldóképletében" a "gyökös részt" $\sqrt{d} = \sqrt{|d|(-1)} = \sqrt{|d|}\mathbf{i}$ alakban írjuk fel (feltételezzük, hogy $d < 0$). Egyébként az $\mathbf{i}$ képzetes egység az $x^2 + 1 = 0$ másodfokú egyenletnek a gyöke.

A komplex számok a (főleg fizikai, műszaki) jelenségek leírásában nagyon fontosak.

2.1.3 A komplex számok ábrázolása

Az $a + b\mathbf{i}$ komplex szám valós és képzetes része egy (a, b) pontot jelöl ki a koordinátarendszerben. (2.1.*ábra*) Geometriailag tehát minden komplex szám egy pont a síkon. Ezért a síkot **komplex számsíknak** nevezhetjük, az x tengelyt **valós tengelynek** az y - t **képzetes tengelynek** hívjuk.



2.1 *ábra*

(Az $\mathbf{i}$ képzetes egység az y tengely 1 pontjára kerül, ugyanis az $\mathbf{i}$ két koordinátája: 0,1, mivel $\mathbf{i} = 0 + 1\mathbf{i}$)

A 2.1 *ábrán* a komplex számot ábrázoló pontot az origóval összekötő egyenesnek az x tengellyel bezárt φ szögét is megjelöltük. Az ábrából látszik, hogy ennek a szögnek a tangense b/a - val egyenlő, tehát a szög

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\,.$$

(ahol az arctg függvény a tg függvény inverze). Így tehát a komplex számot ábrázoló pontot a φ szög és az r távolság is egyértelműen meghatározza.

2.1.4 A komplex szám abszolút értéke

A $z = a + b\mathbf{i}$ komplex szám **abszolút értékén** a

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

valós számot értjük. Mint a 2.1 *ábrán* láthatjuk az abszolút érték éppen a komplex számot ábrázoló pontnak az origótól való r távolságát jelenti (az a, b befogójú derékszögű háromszög átfogójának a hossza). Ezért az abszolút értéket a komplex szám **hosszának**, **nagyságának** is nevezik. A komplex számok körében nem lehet beszélni kisebb, nagyobb relációról, de abszolút értékeik összehasonlíthatók.

Könnyen be lehet látni, hogy az abszolút értékekre érvényesek az alábbi egyenlőségek:

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ 2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $(|z_2| \neq 0)$ 3. $|z^n| = |z|^n$

2.2 A komplex szám trigonometrikus alakja

Mint a 2.1 *ábrán* láthatjuk, a $z = a + b\mathbf{i}$ komplex szám valós része $a = r\cos\varphi$, a képzetes rész pedig $b = r \sin \varphi$ alakban is felírható, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$. Ez viszont azt jelenti, hogy minden z komplex szám

$$z = r(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi)$$

alakban is megadható. Ezt az alakot a komplex szám **trigonometrikus alakjának** nevezzük.

PÉLDA. Irjuk fel a $z = 3 + 3\mathbf{i}$ komplex számot trigonometrikus alakban.

Az abszolút érték: $r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. A φ szög: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{3} = 1$, tehát: $\varphi = \pi/4$, mert a $\pi/4$ szög tangense 1.(azaz arctg $1 = \pi/4$).

Azt kaptuk tehát, hogy $z = 3\sqrt{2}(\cos \pi/4 + \mathbf{i} \sin \pi/4)$

A trigonometrikus alakban adott komplex számokkal végzett műveletekre jól kezelhető formulák adhatók.

2.2.1 Műveletek

Legyen $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + \mathbf{i} \sin \varphi_1)$; $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + \mathbf{i} \sin \varphi_2)$

1. *Szorzat*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i} \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Mint látjuk: két komplex szám szorzásánál az abszolút értékek szorzódnak, a szögek pedig összeadódnak.

PÉLDA. Legyen $z_1 = 3(\cos \pi/2 + \mathbf{i} \sin \pi/2)$; $z_2 = 4(\cos \pi/4 + \mathbf{i} \sin \pi/4)$. Akkor:

$$z_1 z_2 = 12(\cos(\pi/2 + \pi/4) + \mathbf{i} \sin(\pi/2 + \pi/4)) = 12(\cos 3/4\pi + \mathbf{i} \sin 3/4\pi)$$

2. *Hányados*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathbf{i} \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Mint látjuk: két komplex szám hányadosának abszolút értéke az abszolút értékek hányadosa, szöge pedig a szögek különbsége.

PÉLDA. Legyen $z_1 = 4(\cos \pi/2 + \mathbf{i} \sin \pi/2)$; $z_2 = 2(\cos \pi/4 + \mathbf{i} \sin \pi/4)$. Akkor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}(\cos(\pi/2 - \pi/4) + \mathbf{i} \sin(\pi/2 - \pi/4)) = 2(\cos \pi/4 + \mathbf{i} \sin \pi/4)$$

3. *Hatvány*

Ha $z = (\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi)$ akkor

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathbf{i} \sin n\varphi)$$

Tehát: az abszolút érték n-edik hatványát, a szög n-szeresét vesszük.

PÉLDA. Legyen $z = 5(\cos \pi/3 + \mathbf{i} \sin \pi/3)$, akkor: $z^4 = 5^4(\cos 4/3\pi + \mathbf{i} \sin 4/3\pi)$

4. *Gyök*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Mint látjuk: egy komplex számnak n db n - edik gyöke van.

PÉLDA. Legyen $z = 8(\cos \pi/3 + \mathbf{i} \sin \pi/3)$, akkor:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi/3+2k\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi/3+2k\pi}{3}\right)\right) \quad k = 0,1,2$$

azaz a három gyök:

$$z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi/3}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi/3}{3}\right)\right) = 2(\cos\pi/9 + \mathbf{i}\sin\pi/9)$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi/3+2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi/3+2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{7}{9}\pi + \mathbf{i}\sin\frac{7}{9}\pi\right)$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi/3+4\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi/3+4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{13}{9}\pi + \mathbf{i}\sin\frac{13}{9}\pi\right)$$

MEGJEGYZÉS. Ezek a műveletek következnek az algebrai alakra definiált műveletekből.

2.3 A komplex szám exponenciális alakja

Az r abszolút érték és a φ szög segítségével minden $z = a + b\mathbf{i}$ komplex szám

$$z = re^{\mathbf{i}\varphi}$$

alakban is felírható.

Ez a felírás nem természetes, ugyanis eddigi ismereteink alapján nem tudjuk megmondani mit értsünk az e irracionális szám **i** - edik hatványán, ahol **i** nem valós szám. Ebbe nem is megyünk itt bele; fogadjuk el, hogy egy komplex szám ilyen alakban is megadható. Érdemes elfogadni, mert a műveletek egy része ebben az alakban adott komplex számok esetén könnyen elvégezhető.

PÉLDA. Irjuk fel a $4 - 4\mathbf{i}$ komplex számot exponenciális alakban.

MEGOLDÁS.

Számítsuk ki r - t: $r = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. A φ szögre tg φ = –4/4 = –1; az a szög aminek a tangense –1: φ = –π/4 (arctg(–1) = – π/4). Tehát $4 - 4\mathbf{i}$ exponenciális alakja:

$$4\sqrt{2}e^{-\mathbf{i}\pi/4}$$

2.3.1 Műveletek

Legyen $z_1 = r_1 e^{\mathbf{i}\varphi_1}$; $z_2 = r_2 e^{\mathbf{i}\varphi_2}$

1. *Szorzat:*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\mathbf{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

PÉLDA. Legyen $z_1 = 2\, e^{\mathbf{i}\pi/4}$; $z_2 = 3e^{-\mathbf{i}\pi/3}$, akkor:

$$z_1 z_2 = 6 \cdot e^{\mathbf{i}(\pi/4 - \pi/3)} = 6\; e^{-\mathbf{i}\pi/12}$$

2. *Hányados*:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathbf{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

PÉLDA. Legyen $z_1 = 6\, e^{\mathbf{i}\,85°}$; $z_2 = 2\, e^{\mathbf{i}\,25°}$, akkor:

$$\frac{z_1}{z_2} = 3e^{\mathbf{i}60°} = 3e^{\mathbf{i}\pi/3}$$

3. *Hatvány*:

Legyen $z = re^{\mathbf{i}\,\varphi}$, akkor:

$$z^n = r^n\, e^{\mathbf{i}n\varphi}$$

PÉLDA. Legyen $z = 2\, e^{\mathbf{i}\,\pi/5}$, akkor:

$$z^5 = 2^5 \cdot e^{\mathbf{i}\,5\pi/5} = 32\, e^{\mathbf{i}\pi}$$

4. *Gyök:*

Legyen $z = re^{\mathbf{i}\varphi}$, akkor:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\mathbf{i}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \qquad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

PÉLDA. Legyen $z = 8e^{\mathbf{i}\,\pi/6}$, akkor:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\, e^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi/6 + 2k\pi}{3}\right)}; \qquad k = 0,1,2 \qquad \text{azaz}$$

$$z_0 = 2\, e^{\mathbf{i}\,\pi/18}$$

$$z_1 = 2\, e^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi/6 + 2\pi}{3}\right)} = 2\, e^{\mathbf{i}\frac{13}{18}}$$

$$z_2 = 2\, e^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi/6 + 4\pi}{3}\right)} = 2\, e^{\mathbf{i}\frac{25}{18}}$$

MEGJEGYZÉS.Nyilvánvaló a trigonometrikus és az exponenciális alak közötti alábbi összefüggés:

$$re^{\mathbf{i}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$$

azaz

$$e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$$

MIRŐL SZÓLT EZ A FEJEZET?

1. A komplex szám

Algebrai alak: $a + b\mathbf{i}$, ahol $\mathbf{i}$ a képzetes egység. ($\mathbf{i}^2 = -1$)

Trigonometrikus alak: $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$, ahol $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} b/a$.

Exponenciális alak: $z = re^{\mathbf{i}\varphi}$, ahol $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} b/a$.

Abszolút érték:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Konjugált: $a + b\mathbf{i}$ konjugáltja $a - b\mathbf{i}$.

2. Műveletek:

Algebrai alak	*Trigonometrikus alak*	*Exponenciális alak*
$z_1 = a_1 + b_1\mathbf{i}$ $z_2 = a_2 + b_2\mathbf{i}$	$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathbf{i}\sin\varphi_1)$ $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathbf{i}\sin\varphi_2)$	$z_1 = r_1 e^{\mathbf{i}\varphi_1}$ $z_2 = r_2 e^{\mathbf{i}\varphi_2}$
Összeg: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}$	———	———
Különbség: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathbf{i}$	———	———
Szorzat: $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\mathbf{i}$	$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$	$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\mathbf{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Hányados: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\mathbf{i}$	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{\mathbf{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Hatvány: ———	$z_1^n = r_1^n(\cos n\varphi_1 + \mathbf{i}\sin n\varphi_1)$	$z_1^n = r_1^n e^{\mathbf{i}n\varphi_1}$

Gyök:

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1}\left[\cos\left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right)\right] \qquad \sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1}\, e^{\mathbf{i}\left(\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right)}$$

FELADATOK

1. Legyen $z_1 = 3 + 5\mathbf{i}$, $z_2 = 2 - 4\mathrm{i}$. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $3z_1$

2. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $(2 + 3\mathbf{i})(3 - 2\mathbf{i})$ b) $(6 - \mathbf{i})(11 + 5\mathbf{i})$

c) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$ d) $\dfrac{2+\mathbf{i}}{1+3\mathbf{i}}$ e) $(3 - 2\mathbf{i})^2$

3. Behelyettesítéssel győződjünk meg, hogy gyöke-e $3 + 2\mathbf{i}$ az $x^2 - 5x + 6 = 0$ egyenletnek

4. Irjuk fel trigonometrikus alakban a következő komplex számokat:

a) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathbf{i}$ b) $-1 + \mathbf{i}$ c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$ d) $-1 + \sqrt{3}\,\mathbf{i}$

5. Legyen $z_1 = 3(\cos \pi/3 \pm \mathbf{i} \sin \pi/3)$, $z_2 = 5(\cos \pi/4 + \mathbf{i} \sin \pi/4)$

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $z_1 z_2$ b) z_1 / z_2 c) z_1^4 d) $\sqrt[4]{z_2}$

6.) Irjuk fel exponenciális alakban a következő komplex számokat:

a) $1/2 - \sqrt{3}/2\,\mathbf{i}$ b) $3 + 4\mathbf{i}$

7.) Legyen $z_1 = 5\,e^{3\mathbf{i}}$; $z_2 = 4e^{-0{,}3\mathbf{i}}$

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $z_1\ z_2$ b) z_1 / z_2 c) z_1^4 d) $\sqrt[3]{z_2}$

MEGOLDÁSOK

1. a) $5 + \mathbf{i}$ b) $1 + 9\mathbf{i}$ c) $9 + 15\mathbf{i}$

2. a) $12 + 5\mathbf{i}$ b) $71 + 19\mathbf{i}$ c) $\mathbf{i}$

d) $1/2 - 1/2\,\mathbf{i}$ e) $5 - 12\,\mathbf{i}$

3. Nem.

4. a) $2(\cos 3\pi/4 + \mathbf{i} \sin 3\pi/4)$ b) $\sqrt{2}(\cos 3\pi/4 + \mathbf{i} \sin 3\pi/4)$

c) $\cos \pi/3 + \mathbf{i} \sin \pi/3$ d) $2(\cos 2\pi/3 + \mathbf{i} \sin 2\pi/3)$

5. a) $15(\cos 7\pi/12 + \mathbf{i} \sin 7\pi/12)$ b) $\frac{3}{5}(\cos \pi/12 + \mathbf{i} \sin \pi/12\,)$

c) $81(\cos 4\pi/3 + \mathbf{i} \sin 4\pi/3)$

d) $\sqrt[4]{5}(\cos \frac{\pi/4 + 2k\pi}{4} + \mathbf{i} \sin \frac{\pi/4 + 2k\pi}{4})$ $k = 0,1,2,3$

6. a) $e^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}$ b) $5e^{0,92\,\mathbf{i}}$

7. a) $20\,e^{2,7\,\mathbf{i}}$ b) $5/4\,e^{3,3\,\mathbf{i}}$ c) $625\,e^{\cdot 12\,\mathbf{i}}$

d) $\sqrt[3]{4}\cdot e^{(-0,3+2k\pi)/3}$