Egymásba ágyazott FOR-ciklusok alkalmazása

Szalkai István

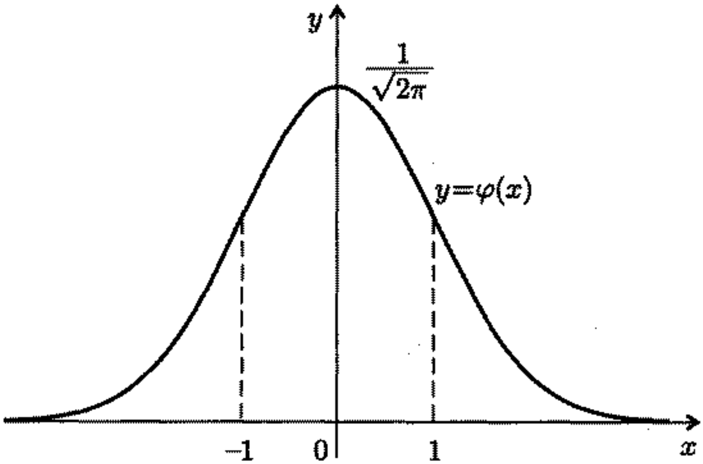
Jelen folyóirat hasábjain 1997-ben megjelent [Sz1] cikkünkben készítettünk egy olyan számítógép-programot, amely tetszőleges sok egymásba „skatulyázott" FOR-ciklust képes működtetni, és ami a lényeg: az egymásba skatulyázott ciklusok számát is futás közben, inputként mi adhatjuk meg tetszésünk szerint. (A program egyik véltozata különböző alapú számrendszerek segítségével működik.)

Azonban a fent említett [Sz1] cikk nem közöl a fenti problémára alkalmazásokat, amit most kívánunk pótolni. Két példát mutatunk be itt, így reméljük, a kedves olvasó meggyőződhet arról, hogy az [Sz1] cikkünkben bemutatott probléma nem légből kapott, nemcsak érdekes, hanem hasznos is.

A normális eloszlás. A valószínűségszámítás egyik alapvető fogalma a normális vagy más néven a Gauss-féle eloszlás. Azt a tapasztalati tényt fejezi ki, hogy ha a gyakorlatban valamely jelenség nagyon sok apró, körülbelül azonos hatás összegeként alakul ki (pl. a napi hőmérséklet), akkor sok kísérlet (megfigyelés) után a lehetséges végeredmények relatív gyakoriságai, a jelenség *eloszlása*, jellegzetes görbét mutat, amely a

$$\varphi(x) = e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

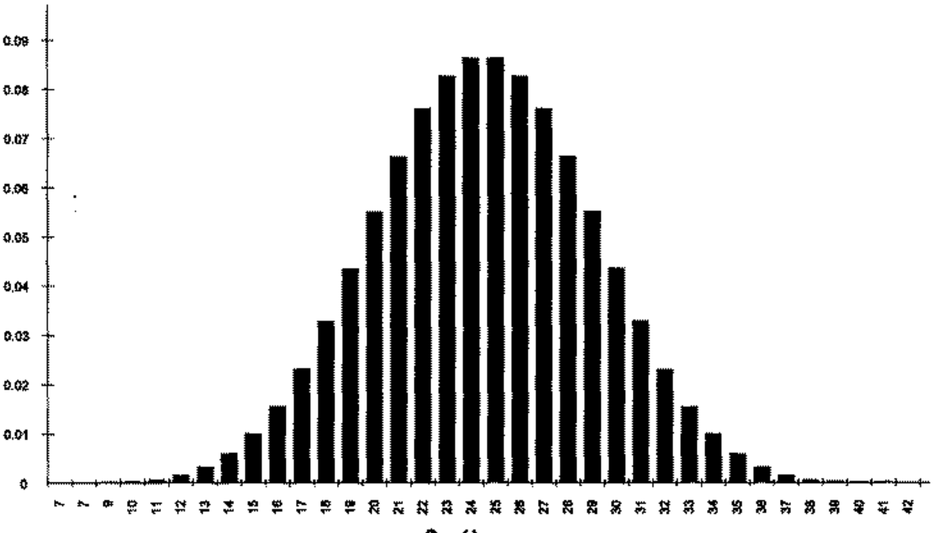
ún. Gauss- vagy más néven *haranggörbéhez* van közel. Itt $m, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ tetszőleges valós paraméterek: m a mérések átlaga, míg σ a mérések szórása.(1) (φ grafikonját az 1. ábrán láthatjuk $m = 0$ és $\sigma = 1$ ún. standard esetben.)



1. ábra
A standard normális eloszlás $\varphi(x) = e^{-x^2}$ ún. sűrűségfüggvénye

(1) „Természetesen" precíz elméleti tétel és bizonyítás, mint többek között a Moivre—Laplace-tétel is, igazolja az iménti mondatokat.

A normális eloszlás legegyszerűbb szemléltetése a következő: vegyünk elő N szabályos dobókockát, és kísérletünk számszerű jelentése (a „valószínűségi változó") legyen a dobások összege. Természetesen N legyen elég nagy, sőt hatoldalú kockák helyett vehetnénk k-oldalú kockákat is. A dobások összege nyilván N és $N \cdot k$ között lehet, míg k^N-féle dobás lehetséges összesen N db k-oldalú kockával. Feladatunk már csak annyi, hogy meghatározzuk az N és $N \cdot k$ közötti lehetséges összegek relatív gyakoriságát. Az $N = 7$ esetet (hatoldalú kockákkal) a 2. ábrán mutatjuk be. Kissé bonyolultabban fogalmazva: hány gyöke lehet az $x_1 + \cdots + x_n = m$ egyenletnek, ha $1 \leq x_i \leq k$, és $N \leq m \leq Nk$? Dobálgatás vagy papír helyett inkább egy számítógép-program írását javasoljuk, amelyben N db FOR-ciklust skatulyázunk egymásba (és egyszerűen a ciklusváltozók összegétől függően „húzunk egy vonást" egy tömb megfelelő elemébe). Ha pedig N-et a program írásakor még nem ismerjük, akkor javasoljuk használni az előző [Sz1] cikkünkben ismertetett megoldást. A program futása előtt nem árt még a futásidőn elgondolkozni: a k^N lépés már kis k és N esetén is jelentős lehet, még gyorsabb gépeken is!



2. ábra

$N = 7$ (hatoldalú) dobókocka összegeinek relatív gyakoriságai

Kevesen ismerik, ezért hadd hívjuk fel a valószínűségszámításban jártas szakemberek figyelmét: a standard normális eloszlás nehezen kiszámítható $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$ eloszlásfüggvényének meglepően pontos közelítésére (táblázat használata helyett) [R] szerint használható az alábbi képlet:

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{th}(0{,}8x),$$

ahol

$$\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

az ún. *„tangens hiperbolicus"* függvény.

2. Pénzváltási probléma. A Brenyó házaspár nagyszerű [B] feladatgyűjteményének 12. old. 17. feladata a következőképpen hangzik:

Hányféleképpen válthatunk fel egy 10Ft-ost 10 pénzdarabra? (Lehet 5, 2, 1 *forint,* 50, 20, 10 *fillér.)*

Mivel a forintosok száma szűk határok között mozog, így könnyen felsorolhatjuk az összes esetet. (A könyvből nyomdahiba miatt kimaradt az 5Ft+2Ft+2 $\cdot$ 1Ft+50f+5 $\cdot$ 10f megoldás.) A feladat általánosítását könnyen megalkothatjuk: n forintot kell felváltanunk m db pénzdarabra, ahol a megengedett címletek $h_1, h_2, \ldots, h_k$ forintok. Vagyis: hány nemnegatív egész gyöke van az

$$\begin{aligned} x_1 \cdot h_1 + \cdots + x_k \cdot h_k &= n \\ x_1 + \ldots + x_k &= m \end{aligned}$$

egyenletrendszernek? A most megfogalmazott problémát a kombinatorikában *„pénzváltlási problémának"* nevezik (ill. egyik változatának), és a konbinatorikának nem a legegyszerűbb problémája (ami ráadásul még nincs is egészében megoldva). Például, ha csak az első egyenletet nézzük (vagyis a pénzérmék összdarabszáma nincs megkötésünk), akkor a megoldások (az egyenlet gyökeinek) számát az

$$F(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - x^{h_i}}$$

generátorfüggvény(2) adja (melynek sorfejtését pl. [Sz2]-ben is megtalálhatjuk).

A bonyolult elmélet helyett (ami csak a megoldások számát adja meg), néha azonban nagyobb hasznát vesszük egy számítógép-programnak, mely „pillanatok alatt" kiírja az összes megoldást, különösen nagy n és m esetén: az $x_1, \ldots, x_k$ változók értékét az adott $0 \le x_1 \le \frac{n}{h_i}$ határok között mozgatva csak a két egyenlet feltételeit kell figyelnünk. (Az olvasó figyelmét ismételten felhívjuk, hogy a majdnem n^k lépés már kis n és k esetén is jelentős lehet!)

(2) ha a_n jelöli az $x_1 h_1 + \cdots + x_k h_k = n$ egyenlet nemnegatív gyökeinek számát n függvényében ($h_1, \ldots, h_k$ rögzített természetes számok), akkor a fenti $F(x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorának együtthatói éppen az a_n számok, azaz $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ minden $x \in \mathbb{R}$ valós számra.

Irodalom

[B] Brenyó Mihály — Brenyó Mihályné: *Szakköri feladatok matematikából, 3—4. osztály,* Tóth Könyvkereskedés Kft, 1997.

[R] A. C. Robin: *A quick approximation to the normal integral,* The Mathematical Gazette, **81**(1997), 95—96.

[Sz1] Szalkai István: *Számrendszerek alkalmazásáról,* Polygon **VII**(1997), 85—88.

[Sz2] Szalkai István: *Diszkrét matematika feladatgyűjtemény,* Veszprémi Egyetemi Kiadó, 1997.

---

dr. Szalkai István, Matematika és Számítástechnika Tanszék, Veszprémi Egyetem, 8200 Veszprém, Pf. 158.