file: csoport4.tex
2005.márc.14.

Véges csoportok osztályozása

Minden adott $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén kérdezhetjük, hogy hány, *páronként nem izomorf* n -elemű (azaz n -edrendű) csoport van, és melyek ezek? Ezt a kérdéskört nevezik a véges csoportok osztályozásának, mely nagyon nehéz, még ma is csak elszórt (ún. sporadikus) tételeket ismerünk. Most csak a legegyszerűbb eredményeket ismertetjük. ($\mathbb{Z}_t$ vagy C_t mindig a t -edrendű ciklikus csoportot jelöli, $t \in \mathbb{N}$.)

$n = p$ (*prímszám*) :
1.TÉTEL: *Prímrendû csoport* ($n = p$ *prímszám*) *mindig ciklikus, azaz csak* $\mathbb{Z}_p$ *lehet.*
BIZONYÍTÁS: Lagrange tétele miatt. □

$n = p^2$ (*prímnégyzet*)
2. TÉTEL: *Minden prímnégyzetrendû csoport* ($n = p^2$) *kommutatív.*
BIZONYÍTÁS: Nem biz. □

3.TÉTEL: *Prímnégyzetrendû csoport* ($n = p^2$) *csak* $\mathbb{Z}_{p^2}$ *vagy* $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ *lehet.*
BIZONYÍTÁS: A 2. tétel és így a véges Abel-csoportok alaptétele miatt, a faktorok csak $\mathbb{Z}_p$.és $\mathbb{Z}_{p^2}$ lehetnek. □

$n = 2p$ (*kétszer prím,* p *páratlan*)
4.TÉTEL: $n = 2p$ (p *páratlan prímszám*) *rendű csoport csak* $\mathbb{Z}_{2p}$ *vagy* D_p (*diédercsoport*) *lehet*. (Nem biz.) □

5. MEGJEGYZÉSEK: (**a**) $\mathbb{Z}_{2p} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_p$ hiszen p páratlan, és jólismert az a tény (1.HÁZI FELADAT), hogy tetszőleges $m, n \in \mathbb{N}$ természetes számokra $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ pontosan akkor ha m és n relatív prímek.
(**b**) Könnyen belátható (2.HÁZI FELADAT), hogy tetszőleges n természetes szám esetén D_n (vagyis a síkbeli szabályos n-szögek transzformáció- [egybevágósági] csoportja) két elemmel generálható ($\frac{2\pi}{n}$ szögű elforgatás és tengelyes tükrözés): $D_n = [a, b]$ az $a^n = b^2 = baba = 1$ feltételekkel, azaz

$$D_n = [a, b \,:\, a^n = b^2 = baba = 1]$$

(vagy más szóval D_n a két elem által generált F_2 szabad csoportnak az $a^n = b^2 = baba = 1$ egyenlőségek által generált kongruencia- reláció szerinti faktora. Ne feledjük, hogy D_n elemeinek száma $2n$!
Hasonlóan látható be, hogy

$$D_\infty := [a, b \,:\, b^2 = baba = 1]$$

ún. végtelen diédercsoport az egész számok egybevágósági transzformációiból áll (eltolás és 0 -ra való tükrözés). Dyck tétele szerint D_∞ -nek mindegyik véges D_n diédercsoport (egy valamilyen) faktora. □

$n = p^3$ (*prímköb*)
6. TÉTEL: p^3 *-rendű kommutatív csoport csak* $\mathbb{Z}_{p^3}$, $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$ *vagy* $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ *lehet.*

BIZONYÍTÁS: A véges Abel-csoportok alaptétele miatt. □

7. **TÉTEL**: 8 *-adrendû nemkommutatív csoport csak* D_4 *vagy* Q (*a kvaterniócsoport*) *lehet*.
BIZONYÍTÁS: Nem biz., de megemlítjük a bizonyításban kulcsszerepet játszó, másutt is hasznos eredményt:
8. **ÁLLÍTÁS**: *Ha egy csoport minden eleme másodrendű, akkor a csoport kommutatív*. (Nem biz.) □

9. **MEGJEGYZÉS**: A kvaterniócsoport $Q = \{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$ ahol $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -ij$, $kj = -jk$, $ik = -ki$, -1 a ”szokásos”, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ és $(-1)^2 = 1$. □

$n = 12$
10. **TÉTEL**: 12 *-drendű csoport csak* Z_{12} , $\mathrm{Z}_2 \times \mathrm{Z}_6$, A_4 (*alternáló csoport*), D_6 *vagy a következő*

$$[\ a, b \ : \ a^3 = b^2 \neq 1, b^4 = baba = 1\ ]$$

csoport lehet. (Nem biz.) □

$n = 15$
11. **TÉTEL**: 15 *-drendű csoport csak* Z_{15} (*a ciklikus csoport*) *lehet*. (Nem biz.) □

$n = 16$
12. **TÉTEL**: 16 *-drendű* (*páronként nem izomorf*) *csoport* 14 *-féle van*: *öt kommutatív, a nemkommutatívak közül öt exponense* 4, *négynek az exponense* 8. (Nem biz.) □

3.**HÁZI FELADAT**: Sorolja fel az öt kommutatív, páronként nem izomorf 16 -odrendű csoportot!

$n = 18$
13. **TÉTEL**: 18 *-drendű* (*páronként nem izomorf*) *csoport öt -féle van*. (Nem biz.) □

4.**HÁZI FELADAT**: A 20 -nál kisebb $n \leq 20$ természetes számokra sorolja fel az összes n -edrendű csoportot!

5.**HÁZI FELADAT**: Soroljon fel legalább tíz-tíz olyan természetes számot, amely - rendű csoportokról a fenti tételek egyáltalában nem illetve csak részben szólnak!

.
eof. csoport4.tex