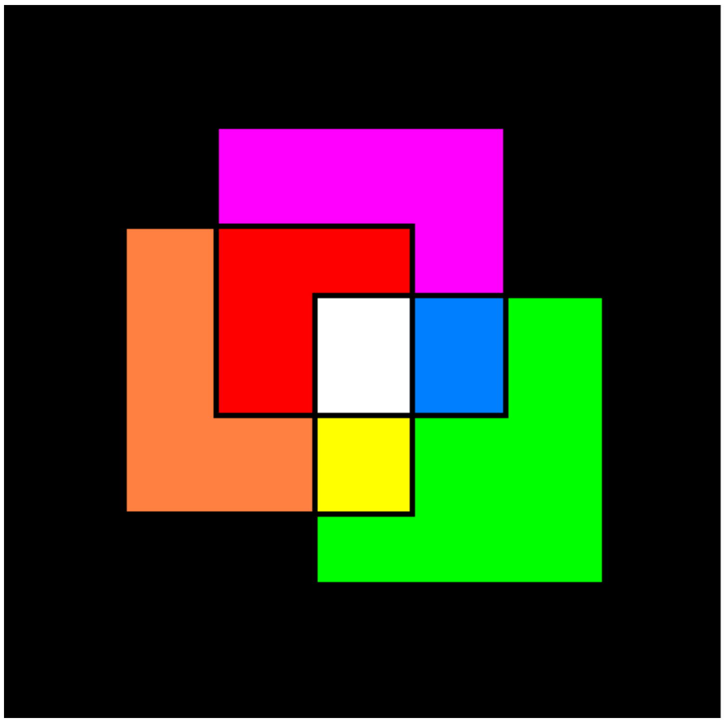
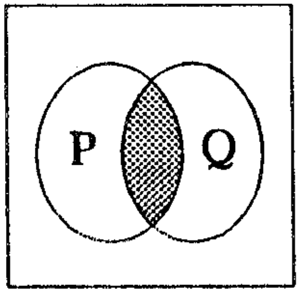
Boole-Algebrák



Megoldhatjuk másképpen is

i = 1
h = 0

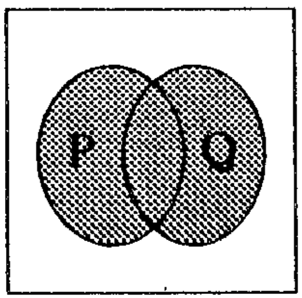
$P \cap Q$



$\cap$		Q	
		1	0
P	1	1	0
	0	0	0

$\wedge$		q	
		1	0
p	1	1	0
	0	0	0

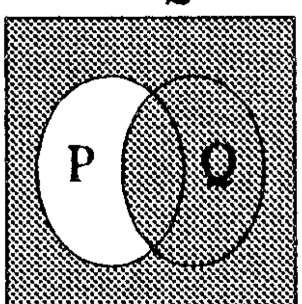
$P \cup Q$



$\cup$		Q	
		1	0
P	1	1	1
	0	1	0

$\vee$		q	
		1	0
p	1	1	1
	0	1	0

$\overline{P \setminus Q}$



$\overline{P \setminus Q}$		Q	
		1	0
P	1	1	0
	0	1	1

$\rightarrow$		q	
		1	0
p	1	1	0
	0	1	1

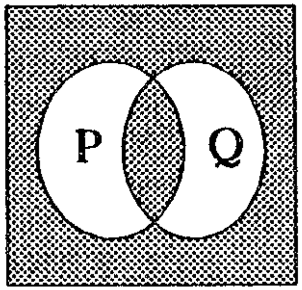
más jelölések:

$\wedge$ = *, &, Π

v = +, Σ

$\sim$ = $\neg$

$\overline{P\Delta Q}$

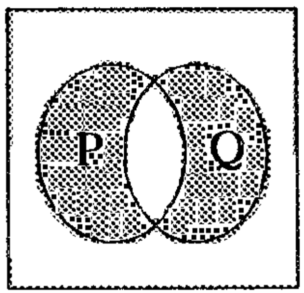


p = q

$\overline{P\Delta Q}$		Q = 1	Q = 0
P	1	1	0
P	0	0	1

$\leftrightarrow$		q = 1	q = 0
p	1	1	0
p	0	0	1

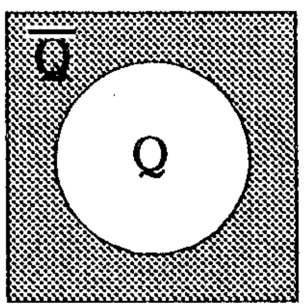
$P\Delta Q$



p ≠ q

$\overline{P\Delta Q}$		Q = 1	Q = 0
P	1	1	0
P	0	0	1

$\leftrightarrow$		q = 1	q = 0
p	1	1	0
p	0	0	1



Q	$\overline{Q}$
1	0
0	1

q	$\overline{q}$
1	0
0	1

(kis) **Számelmélet**

lnko(12,18) = {2,2,3} $\cap$ {2,3,3} = {2,3} = 6 ,

lkkt(12,18) = {2,2,3} $\cup$ {2,3,3} = {2,2,3,3} = 36 ,

1 = $\varnothing$,

. . . .

d(42) = osztók halmaza = {1, 2, 3, 7, 6, 14, 21, 42 } = P{2, 3, 7}

Halmazműveletek tulajdonságai: (M.Stone Tétele)

kommutativitás	$A \cup B = B \cup A$	(BA1)
	$A \cap B = B \cap A$	(BA2)
asszociativitás	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	(BA3)
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(BA4)
disztributivitás	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(BA5)
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(BA6)
elnyelési tulajdonságok	$A \cup (A \cap B) = A$	(BA7)
	$A \cap (A \cup B) = A$	(BA8)
$\emptyset$ és I tulajdonságai	$A \cup \overline{A} = I$	(BA9)
	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	(BA10)
	$A \cup \emptyset = A$	(BA11)
	$A \cap \emptyset = \emptyset$	(BA12)
	$A \cup I = I$	(BA13)
	$A \cap I = A$	(BA14)

$$\underline{\mathfrak{B}} = (\mathbf{B};\ \cup, \cap, \sim,\ \mathrm{O}, \mathrm{I}\ )$$

1.9. Tétel (a Dualitás Elve): *Legyen Φ egy olyan egyenlőség (formula), mely a Boole- algebrák nyelvén van felírva (azaz csak a* $\vee, \wedge, \neg, |, \circ$ *jeleket, változó- és zárójeleket tartalmaz, és az* $=$ jelet*) és a változók minden lehetséges értékére igaz (azaz* **azonosság***). Cseréljük fel* Φ -ben az $\vee$ *és* $\wedge$ *jeleket, valamint az* $|$ *és* $\circ$ *jeleket, a többi jelet hagyjuk változatlanul. Ekkor a* Φ *azonosság így kapott* Φ" **duálisa** *is azonosság, azaz* Φ" *is igaz a változók minden értéke esetén.* $\square$

4.3. Tétel. *Az alábbi formulák mindegyike tautológia:*

$$
\begin{aligned}
A \to A \ &\big(\equiv A \vee (\neg A)\big),\\
\big(A \wedge (A \to B)\big) &\to B,\\
\big((\neg B) \wedge (A \to B)\big) &\to (\neg A),\\
\big((\neg A) \wedge (A \vee B)\big) &\to B,\\
A &\to \big(B \to (A \wedge B)\big),\\
(A \wedge B) &\to A,\\
A &\to (A \vee B),\\
\big((A \to B) \wedge (B \to C)\big) &\to (A \to C),\\
(A \to B) &\to \big((B \to C) \to (A \to C)\big),\\
(A \to B) &\to \big((A \wedge C) \to (B \wedge C)\big),\\
(A \to B) &\to \big((A \vee C) \to (B \vee C)\big),\\
\big((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)\big) &\to (A \leftrightarrow C),
\end{aligned}
$$

továbbá

$$
\begin{aligned}
(A \leftrightarrow B) &\to \big((A * C) \leftrightarrow (B * C)\big),\\
(A \leftrightarrow B) &\to \big((C * A) \leftrightarrow (C * B)\big),
\end{aligned}
$$

ahol $*$ a $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ *logikai műveletek bármelyike lehet.*

$$
\begin{aligned}
\neg(A \leftrightarrow B) &\equiv \neg\big((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\big) \equiv \\
&\equiv \neg\big(((\neg A) \vee B) \wedge ((\neg B) \vee A)\big) \equiv \\
&\equiv \big(\neg((\neg A) \vee B)\big) \vee \big(\neg((\neg B) \vee A)\big) \equiv \\
&\equiv \big((\neg(\neg A)) \wedge (\neg B)\big) \vee \big((\neg(\neg B)) \wedge (\neg A)\big) \equiv \\
&\equiv \big(A \wedge (\neg B)\big) \vee \big(B \wedge (\neg A)\big) \equiv \\
&\equiv (A \vee B) \wedge \big(A \vee (\neg A)\big) \wedge \big((\neg B) \vee B\big) \wedge \big((\neg B) \vee (\neg A)\big) \equiv \\
&\equiv (A \vee B) \wedge \big((\neg B) \vee (\neg A)\big) \equiv \\
&\equiv (A \vee B) \wedge \big(\neg(B \wedge A)\big) \equiv \\
&\equiv (A \vee B) \wedge \big(\neg(A \wedge B)\big).
\end{aligned}
$$

(3) Az előző okoskodás során igazoltuk, hogy a

$$\big((\neg A) \vee B\big) \wedge \big((\neg B) \vee A\big)$$

formula tagadása logikailag ekvivalens az

$$\big(A \wedge (\neg B)\big) \vee \big(B \wedge (\neg A)\big)$$

Algebrai levezetés

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
			2.∧ 3.	1.∨ 4.	1.∨ 2.	1.∨ 3.	6.∧7.
p	q	r	q ∧ r	p∨(q ∧ r)	p ∨ q	p ∨ r	(p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	h	i	i	i	i
i	h	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	i	i	i
h	i	i	i	i	i	i	i
h	i	h	h	h	i	h	h
h	h	i	h	h	h	i	h
h	h	h	h	h	h	h	h

Formula kiértékelése igazságtáblázattal

A	B	C	$((A \vee B \vee C)$	$\wedge$	$\overline{B}$	$\wedge\ \overline{C})$	$\rightarrow$	A
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	1

Megjegyzések:

***)   Igazságtáblázat kiértékelése   O(2^n) idő => LASSÚ**

***)   NP -teljes (Cook, 1971):**   *" Ha erre a problémára lenne gyors algoritmus, akkor a világ összes problémájára is lenne gyors algoritmus"* .   □

<u>megfordítva</u>: táblázat => formula

p	q	r	s	f(p, q, r, s)
i	h	h	i	i
h	i	h	i	i
h	h	i	h	i
egyébként				h

$$f(p,\ q,\ r,\ s)\ =$$

$$= (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s)$$

DNF = <u>Diszjunktív Normál Forma</u>

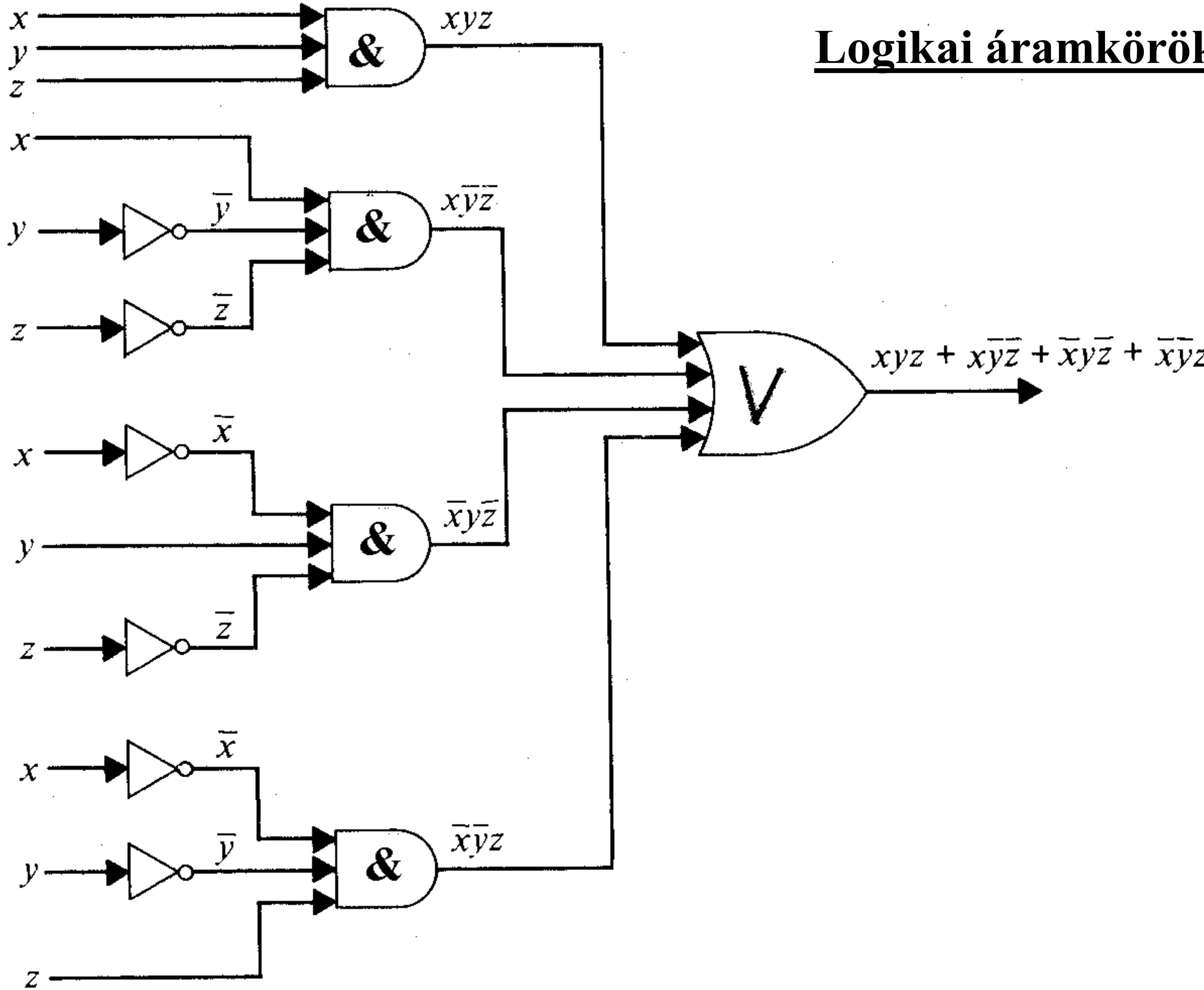
DNF = konjukciók (mintermek) **D**iszjunkciója

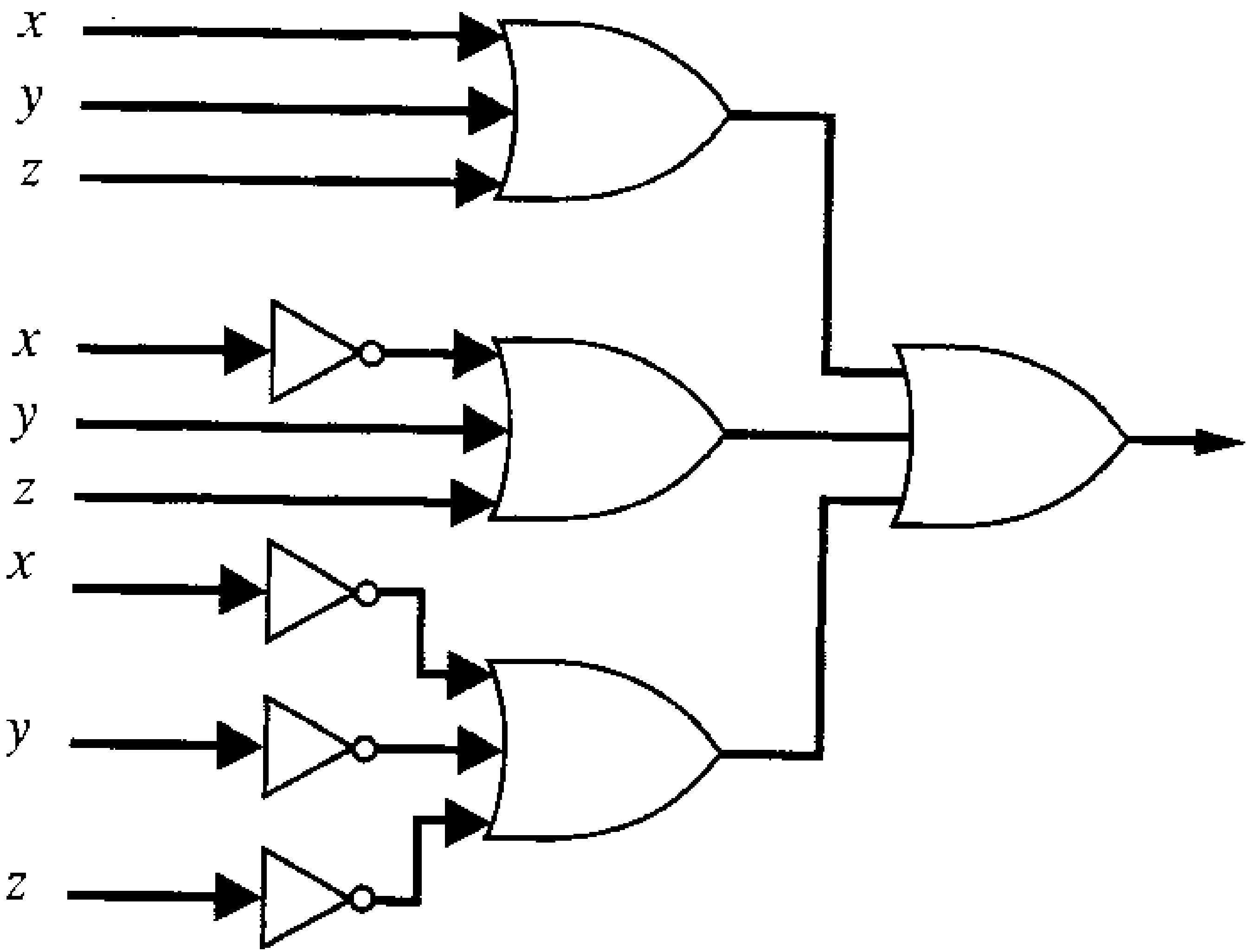
CNF = diszjunkciók (maxtermek) **C**onjukciója

<u>**Tétel:**</u> $\cup$, $\cap$, ~ ***teljessége.*** □

Egyszerűsítés: Karnaugh módszer, stb.

Logikai áramkörök




x
y
z
x
y
z
x
y
z

= ?