

A közgazdaságtan matematikai alapjai
5. gyakorló feladatsor
Függvények határértéke

1. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2$	(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$	(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3-8}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$	(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-x-10}{x^2-x-2}$	(f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$
(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-2x+1}{x^3-x^2+3x-3}$	(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^2}$	(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}}$
(j) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	(k) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$	(l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3}}$
(m) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{6-x}-2}$	(n) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ x+2 }{x+2}$	(o) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ x+2 }{(x+2)^2}$
(p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$	(q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}$	(r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x}}$
(s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2}$	(t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+\sin^2(x)}{4x^2}$	(u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1-\cos(x)}$

2. **Feladat.** Vizsgáljuk meg a következő függvények határértékét (ha létezik) a megadott x_0 pontokban.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$	(b) $\lim_{x \rightarrow +} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x}$	(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}$
(d) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x}$	(e) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)(x-1)}$	(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$
(g) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$	(h) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3-x^2+x-1}{x(x-1)(x+1)}$	(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$
(j) $\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{(x^2+3x+12)}$	(k) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x}$	(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x}{-x}$
(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$	(n) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$	(o) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3-x}$

3. **Feladat.** Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} f$, $\lim_{x \rightarrow 1} f$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f$ határértékeket (ha léteznek), ahol $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és

(a) $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-10x}$	(b) $f(x) = \frac{x^2-6x+2}{x^3+x^2}$	(c) $f(x) = \frac{x^5-3x^2+x}{x^5-10x^4+1}$
(d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	(e) $f(x) = \frac{x-1}{1-\sqrt[3]{x}}$	

4. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3}{x^2-4}$	(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3+5}$	(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x+3}$
(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2x}{x+3}$	(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x+1)(x+2)} - x$	(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$
(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$	(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$	(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$
(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$	(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{1+2x}$	(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3x-2}{x^2+3x+1} \right)^{x^2+5}$
(m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2+x+1} \right)^{x-2}$	(n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	(o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

5. **Feladat.** Számítsuk ki az alábbi féloldali határértékeket, ha léteznek!

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ x-1 }{x-1}$	(b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ x-1 }{x-1}$	(c) $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2x^2 + 5x - 12}{x^2 + 3x - 4}$
(d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$	(e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - x}$	(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - x}$
(g) $\lim_{x \rightarrow -1^-} 2^{\frac{1}{x+1}}$	(h) $\lim_{x \rightarrow -1^+} 2^{\frac{1}{x+1}}$	(i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{ x } + \frac{1}{x}}$
(j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{ x } + \frac{1}{x}}$	(k) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{-2x} - x}{x+2}$	(l) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{-2x} - x}{x+2}$
(m) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 2^{tg(x)}$	(n) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 2^{tg(x)}$	(o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

6. **Feladat.** Adjuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi határértékek létezzenek és végesek legyenek! Számítsuk ki ezen határértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-a}{x^2-4}$	(b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-a}{x+3}$	(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-5x^2+ax+24}{x-3}$
--	---	---

Jó munkát!