Valószínűségi változók függetlensége

1. Legyen $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, és tekintsük az $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$ klasszikus valószínűségi mezőt. Az $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ v. v.-k jelentése: $i \in \Omega$ esetén $X(i)$ az i 3-mal való osztásakor keletkező maradék, míg $Y(i)$ az i 2-vel való osztásakor fellépő maradék.

a. Igazolja, hogy az X és az Y függetlenek.

b. Adja meg az $X+Y$ eloszlását.

2. Legyenek X és Y független v. v.-k, amelyekre $P_X = P_Y = \frac{1}{2}\varepsilon_{-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_1$, és legyen $Z = X \cdot Y$. Igazolja, hogy az X, Y, Z v. v.-k páronként függetlenek, de nem függetlenek.

3. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független v. v.-k, amelyekre $P_{X_i} = Kar(p)$, $i = 1, \dots, n$.

a. Igazolja, hogy az $X_1 + \dots + X_n$ v. v. eloszlása $Bin(n,p)$.

b. Az a. rész felhasználásával számítsa ki az $X_1 + \dots + X_n$ várható értékét és szórását.

4. Legyenek X és Y független v. v.-k, amelyekre $P_X = Bin(3, \frac{1}{3})$ és $P(Y=1) = P(Y=2) = \frac{1}{2}$. Adja meg az $X+Y$, $X \cdot Y$, $\min(X,Y)$ és $\max(X,Y)$ v. v.-k eloszlását, várható értékét és szórását.

5. Legyenek X és Y független v. v.-k, amelyek eloszlása: $P(X=n) = P(Y=n) = \frac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. Adja meg az alábbi valószínűségeket:

a. $P(\min(X,Y) \leq n)$ b. $P(X=Y)$ c. $P(X>Y)$

d. $P(X$ osztója Y-nak$)$ e. $P(X \geq kY)$, ahol $k \in \mathbb{N}^+$ rögzített

6. Legyenek X és Y független v. v.-k, amelyekre $P_X = Geo(p)$ és $P_Y = Geo(q)$. Igazolja, hogy a $\min(X,Y)$ v. v. is geometriai eloszlású.

7. Legyenek X és Y független v. v.-k. Határozza meg az $X+Y$ eloszlását, ha

a. $P_X = Bin(2, \frac{1}{3})$ és $P_Y = Bin(3, \frac{1}{3})$,

b. $P_X = P_Y = Uni([0,1])$,

c. $P_X = Uni([0,1])$ és $P_Y = Exp(1)$,

d. $P_X = Exp(\lambda)$ és $P_Y = Exp(\eta)$,

e. az X és az Y sűrűségfüggvénye: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

8. Két üzem, A és B közös raktárral rendelkezik. A raktárba havonta szállítanak N mennyiségű nyersanyagot, amelyből mind két üzem annyit használ fel, amennyi a szükséglete. Az A üzem felhasználása Nor(150, 10), a B üzemé pedig Nor(210, 15) eloszlású v. v.. Mennyi legyen a raktárban lévő N készlet a hónap elején, ha azt kívánjuk, hogy e készlet az üzemeket együttesen legalább 0,99 valószínűséggel elégítse ki?

9. Legyenek X és Y független v. v.-k, amelyekre $P(X+Y=\alpha)=1$ valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén. Igazolja, hogy az X és az Y konstans v. v.-k.

10. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független v. v.-k, amelyekre $E(X_i) = m \in \mathbb{R}$ és $D^2(X_i) = \sigma^2$ $(i = 1, \dots, n)$. Legyen

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \text{és} \quad S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

Igazolja, hogy

a. $E(\bar{X}) = m$ b. $D^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ c. $E(S) = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$.