Folytonos eloszlású v. v.-k

1. Geometriai valószínűség szerint választunk egy pontot a $[-2,$ intervallumból. Legyen X a választott pont origótól való távolsága. Mutassa meg, hogy az X folytonos eloszlású v. v., és adja meg az X eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét, valamint szórását.

2. Legyen az X v. v. sűrűségfüggvénye $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \cdot \sin(x)$, ha $x \in]0, \pi[$, és $f(x) = 0$ különben.
a. Adja meg a c-t.
b. Adja meg az X eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.
c. Határozza meg: $P(|X - E(X)| < D(X))$.

3. Legyen az X v. v. sűrűségfüggvénye $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a + bx^2$, ha $x \in]0,1[$, és 0 különben, és legyen $E(X) = \frac{3}{5}$. Adja meg az a, b-t.

4. Legyen az X v. v. sűrűségfüggvénye $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx^2$, ha $x \in]0,1[$, és $f(x) = 0$ különben.
a. Adja meg a c-t.
b. Adja meg az X eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.
c. Számítsa ki: $P(X > \frac{1}{2})$.

5. Legyen az X v. v. sűrűségfüggvénye $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$, ahol $\lambda > 0$. Adja meg az X várható értékét és szórását.

6. Legyen X egy v. v., amelyre $P_X = \mathcal{E}xp(\lambda)$. Igazolja, hogy $c > 0$ esetén $P_{c \cdot X} = \mathcal{E}xp(\frac{\lambda}{c})$.

7. Legyen X egy v. v., amelynek létezik véges várható értéke és szórása, valamint $D(X) \neq 0$. Adja meg az $\frac{1}{D(X)}(X - E(X))$ v. v. várható értékét és szórását.

8. Telefonhívás alkalmával a tárcsázás befejezésétől a kapcsolásig eltelt időt tekintsük egyenletes eloszlású v. v.-nak. Tfh. a kapcsolás időtartama 2 másodperctől 15 másodpercig terjedhet.
a. Adja meg a v. v. sűrűség- és eloszlásfüggvényét.
b. Számítsa ki a v. v. várható értékét és szórását.
c. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább 6 másodpercig kell várni a kapcsolásig?

9. Egy autóbusz egy útkereszteződéshez véletlenszerűen érkezik. A várakozási idő átlagosan 20 másodperc. Tekintsük a várakozási időt exponenciális eloszlású v. v.-nak. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy

a. a várakozási idő 10 másodpercnél tovább tart,

b. a várakozási idő legfeljebb 5 másodpercet tér el a várható értéktől,

c. a várakozási idő a szórásnál nagyobb értékkel tér el a várható értéktől,

d. 10 másodperc várakozás után még további 15 másodpercet kell várni.

10. Egy gép által gyártott termék súlya normális eloszlású v. v. amelynek a várható értéke 100g, a szórása pedig 2g. Mekkora a valószínűsége, hogy egy találomra kiemelt termék súlya

a. 103g-nál több, b. 99g-nál kevesebb,

c. 97g és 103g közé esik, d. 101g és 104g közé esik,

e. 98g és 99g közé esik,

f. nem tér el a várható értéktől a szórásnál jobban,

g. a várható értéktől való eltérés abszolút értéke 1g-nál több?

h. A várható érték körül milyen határok között mozog a termék súlya 0,95 valószínűséggel?

11. Legyen X egy v. v., amelyre $P_X = Uni([-1,1])$. Adja meg az X^3 sűrűségfüggvényét.

12. Legyen X egy v. v., amelyre $P_X = Exp(\lambda)$. Adja meg a $\sqrt{X}$ és az $\frac{1}{X}$ sűrűségfüggvényét.

13. Legyen X egy v. v., amelyre $P_X = Uni([0,1])$, és legyen $Y = -\frac{1}{\lambda}(\ln \circ X)$, ahol $\lambda > 0$. Igazolja, hogy $P_Y = Exp(\lambda)$.

14. Legyen X egy v. v., amelyre $P_X = Nor(m, \sigma)$. Adja meg az $\exp \circ X$ sűrűségfüggvényét.

15. Legyen $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az X folytonos eloszlású v. v. eloszlásfüggvénye. Igazolja, hogy $P_{F \circ X} = Uni([0,1])$.