Diszkrét eloszlású v. v.-k.

1. Egy érmével dobunk. Ha az első dobás fej, akkor még kétszer dobunk, ha írás, akkor még egyszer. Legyen X a fej dobások száma
a. Adja meg az X eloszlását és eloszlásfüggvényét.
b. Adja meg az X várható értékét és szórását.

2. Egy érmével 6-szor dobunk egymástól függetlenül. Legyen X a fej- és írásdobások száma közötti különbség abszolút értéke.
a. Adja meg az X eloszlását és eloszlásfüggvényét.
b. Adja meg az X várható értékét és szórását.

3. Egy dobozban 3 fekete, 2 fehér és 1 piros golyó van. Ebből addig húzunk visszatevés nélkül, amíg piros kerül a kezünkbe. Legyen X a szükséges húzások száma.
a. Adja meg az X eloszlását.
b. Adja meg az X várható értékét és szórását.

4. Egy gép által gyártott eszközök 10%-a selejtes. Ismétléses mintavétellel kiválasztunk 4 darabot. Legyen X a mintában levő hibátlan darabok száma.
a. Adja meg az X eloszlását és eloszlásfüggvényét.
b. Adja meg az X várható értékét és szórását.
c. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a mintában 1-nél több, de 4-nél kevesebb selejtes lesz?

5. 50 munkadarabból 5 selejtes. Ismétlés nélküli mintavétellel kiválasztunk 3 darabot. Legyen X a mintában levő selejtes darabok száma.
a. Adja meg az X eloszlását, és eloszlásfüggvényét.
b. Adja meg az X várható értékét és szórását.
c. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a mintában nem lesz selejt?

6. Egy ruhaszövetben átlagban 100 méterenként 5 hiba van. Egy 300 méteres szövetet 3 méteres darabokra vágunk. Előreláthatóan hány hibátlan lesz közöttük? (Feltesszük, hogy a hibák száma Poisson eloszlású v. v.)

7. Addig dobunk egy kockával, amíg ötösnél kisebb számot nem kapunk. Legyen X a dobások száma.

a. Adja meg az X eloszlását.
b. Adja meg az X várható értékét és szórását.
c. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legalább 100 dobás kell az első ötösnél kisebb szám eléréséhez?

8. Egy szabályos kockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobott számok szorzata.
a. Adja meg az X eloszlását.
b. Számítsa ki a $P(X=k \mid D)$ valószínűséget, ahol D jelenti azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 7.

9. 16 doboz mindegyikében 20 golyó van. Az i-edik dobozban $i-1$ fehér, a többi fekete ($i=1,\dots,16$). Mindegyik dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy golyót. Legyen X a kivett 16 golyó között található fehérek száma. Adja meg az $E(X)$-et.

10. Legyen az X v. v. eloszlása $P_X = \frac{1}{6}\varepsilon_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3$. Adja meg a következő v. v.-k eloszlását, várható értékét és szórását.
a. X^3 b. $\ln \circ X$ c. $1/X$.

11. Legyen X egy v. v.. Határozza meg $E(X(X-1)\cdot\ldots\cdot(X-n+1))$-et, ha
a. $P_X = Poi(\lambda)$ b. $P_X = Geo(p)$.

12. Legyen X olyan v. v., amelyre $im(X) \subset \mathbb{N}$. Igazolja, hogy
$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X>n).$$

13. Legyen A egy $N \in \mathbb{N}^+$ elemű halmaz, legyen $Y \subset A$ M elemű ($0 \le M \le N$), és legyen $0 \le n \le N$. Tekintsük az ismétlés nélküli mintavételnél bevezetett $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt. Legyen $a \in Y$ esetén $A_a := \{\omega \in \Omega \mid a \in \omega\}$, és $1_{A_a}: \Omega \to \mathbb{R}$, $1_{A_a}(\omega) = 1$, ha $a \in \omega$, és $1_{A_a}(\omega) = 0$, ha $a \notin \omega$.
a. Igazolja, hogy az $X := \sum_{a \in Y} 1_{A_a}$ v. v. eloszlása $Hip(N, M, n)$.
b. Adja meg az $E(X)$-et.
c. Igazolja, hogy az A_a és az A_b ($a, b \in Y$) nem függetlenek.