Speciális valószínűségi mezők a $\mathcal{B}^1$-en

1. Legyen $P: \mathcal{B}^1 \to [0,1]$, $P = \frac{1}{5}\varepsilon_1 + \frac{2}{5}\varepsilon_2 + \frac{2}{5}\varepsilon_4$. Adja meg, és ábrázolja a P eloszlásfüggvényét. Számítsa ki a $P([0,1])$, $P(]1,4[)$, $P(\{2\})$, $P(\{2,3\})$ és $P(]1,\infty[)$ valószínűségeket.

2. Legyen $F = \frac{1}{4} 1_{]0,\infty[} + \frac{1}{2} 1_{]1,\infty[} + \frac{1}{4} 1_{]2,\infty[}$, ahol $1_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz karakterisztikus függvénye ($1_A(x) = 1$, ha $x \in A$, és $1_A(x) = 0$, ha $x \notin A$).
a. Igazolja, hogy az F eloszlásfüggvény, ábrázolja az F-et, és adja meg az F által meghatározott P eloszlást.
b. Számítsa ki a következő halmazok valószínűségeit: $[0,2[$, $\{2\}$, $]0,2]$, $[0,2]$, $[-2,2]$, $\{3\}$, $]-\infty,1[$, $]0,\infty[$, $[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}]$, $\{2n+1 \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

3. Legyen $F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 1_{]\frac{1}{n},\infty[}$.
a. Igazolja, hogy az F eloszlásfüggvény, és adja meg az F által meghatározott P eloszlást.
b. Számítsa ki a következő halmazok valószínűségeit: $[1,\infty[$, $[\frac{1}{10},\infty[$, $\{0\}$, $[0,\frac{1}{2}[$, $]-\infty,0]$, $]0,\infty[$.

4. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$, és $n \in \mathbb{N}^+$. Válassza meg a $c \in \mathbb{R}^+$ paraméter értékét úgy, hogy a $\mu : \mathcal{B}^1 \to [0,\infty[$, $\mu = \sum_{i=0}^{n-1} c\,\varepsilon_{a+ih}$ mérték eloszlás legyen. Adja meg, és ábrázolja a kapott eloszlás eloszlásfüggvényét, ha $a = 0$, $h = 1$, és $n = 4$. ((a,h,n) paraméterű diszkrét egyenletes eloszlás).

5. Adja meg a $c \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{n!} 1_{]n,\infty[}$ függvény eloszlásfüggvény legyen. Adja meg az F által meghatározott P eloszlást, és számítsa ki a $P(\{2n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\})$ valószínűséget.

6. Adja meg és ábrázolja az alábbi nevezetes eloszlások eloszlásfüggvényeit: $Sin(2)$, $Kar(\frac{1}{4})$, $Bin(2,\frac{1}{3})$, és $Hip(3,2,1)$.

7. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, és $\beta > 0$. Legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\beta(x-\alpha)}, & \text{ha } x < \alpha \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\beta(x-\alpha)}, & \text{ha } x \geq \alpha \end{cases}$
a. Igazolja, hogy az F eloszlásfüggvény.
b. Folytonos eloszlást határoz-e meg az F?

8. Legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1 \\ (x-1)^3, & \text{ha } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$

a. Igazolja, hogy az F eloszlásfüggvény.

b. Folytonos eloszlást határoz-e meg az F?

9. Igazolja, hogy az alábbi függvények sűrűségfüggvények.

a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\le 0 \text{ vagy } x\ge \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ha } 0<x<\frac{1}{4} \end{cases}$

b. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \beta^2 x e^{-\beta x}, & \text{ha } x\ge 0 \\ 0, & \text{ha } x<0 \end{cases}$, ahol $\beta>0$.

c. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \alpha\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha}, & \text{ha } x\ge 0 \\ 0, & \text{ha } x<0 \end{cases}$, ahol $\alpha,\beta>0$.

d. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\beta\pi}\cdot\frac{1}{1+(x-\alpha)^2/\beta^2}$, ahol $\alpha\in\mathbb{R}$ és $\beta>0$.

e. Adja meg az a.–d.-beli sűrűségfüggvényekhez tartozó eloszlásfüggvényeket.

10. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{ha } x\in\,]0,a[\\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, ahol $a>0$.

a. Milyen a esetén lesz az f sűrűségfüggvény?

b. Adja meg az f-hez tartozó eloszlásfüggvényt.

c. Számítsa ki a $P([1,\infty[)$, $P(\{\frac{1}{n}\in\mathbb{R}\mid n\in\mathbb{N}^+\})$, és a $P([0,2])$ valószínűségeket, ahol P az f által meghatározott eloszlás.

11. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} cx^2(1-x)^3, & \text{ha } x\in\,]0,1[\\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, ahol $c\in\mathbb{R}$.

a. Milyen c esetén lesz az f sűrűségfüggvény?

b. Számítsa ki a $P(]\frac{1}{2},\infty[)$ valószínűséget, ahol P az f által meghatározott eloszlás.

12. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x<2 \\ \frac{a}{x^3}, & \text{ha } x\ge 2 \end{cases}$, ahol $a\in\mathbb{R}$.

a. Milyen a esetén lesz az f sűrűségfüggvény?

b. Adja meg az f-hez tartozó eloszlásfüggvényt.

c. Milyen $x\in\mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy $P(]-\infty,x[)=\frac{1}{2}$, ahol P az f által meghatározott eloszlás.

13. Ábrázolja az $Exp(\lambda)$ és a $Nor(m,\sigma)$ eloszlások sűrűségfüggvényeit.

14. Legyen $P = \mathrm{Exp}(\lambda)$. Igazolja, hogy $P(]x+t,\infty[\mid]x,\infty[) = P(]t,\infty[)$, ahol $x \in \mathbb{R}$ és $t > 0$.

15. Diszkrét eloszlás-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \varepsilon_n$ mérték?

16. Legyen $P = \mathrm{Poi}(\lambda)$. Határozza meg a $P(\{0\}), \dots, P(\{n\}), \dots$ valószínűségek közül a legnagyobbat.

17. Igazolja, hogy ha $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy eloszlásfüggvény, és $\alpha > 0$, akkor az F^{α} szintén eloszlásfüggvény.

18. Az előző feladat felhasználásával igazolja a következőt: ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan pozitív sűrűségfüggvény, amelynek az eloszlásfüggvénye differenciálható, akkor van olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitív és növekedő függvény, hogy az fg is sűrűségfüggvény.