Feltételes valószínűség, események függetlensége

1. Egy dobozban $n \geq 1$ fehér és $m \geq 1$ fekete golyó van. Véletlenszerűen, egymás után két golyót húzunk ki visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy ha az első húzás fehér golyó volt, a második húzás is fehér lesz?

2. Egy szabályos érmét négyszer egymás után feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább kettő fejet dobunk, feltéve, hogy az első dobás írás?

3. Egy kockával addig dobunk, amíg 6-ost nem kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy háromnál több dobásra van szükség, feltéve, hogy az első dobás nem hatos?

4. Ha A, B és C események, valamint $P(C) > 0$, akkor $P(A \cup B | C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B | C)$.

5. Legyen $P(A|B) = 0{,}7$; $P(A|B^c) = 0{,}3$; és $P(B|A) = 0{,}6$. Határozza meg: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ és $P(A \cup B)$.

6. Adjon szükséges és elegendő feltételt az A és B események függetlenségére, ha a. $A \cap B = \emptyset$ b. $A \subset B$.

7. Feldobunk egy kockát kétszer. A_k jelöli azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye osztható k-val, B_l pedig azt az eseményt, hogy a dobott számok összege osztható l-el $(k, l \in \mathbb{N}^+)$. Függetlenek-e a következő események: a. A_2 és B_2 b. A_4 és B_4?

8. Feldobunk egy kockát kétszer. A_i $(i = 1, 2)$ jelöli azt az eseményt, hogy az i-edik dobás páratlan, A_3 pedig az az esemény, hogy a dobott számok összege páratlan. Igazolja, hogy az A_1, A_2, A_3 események páronként függetlenek, de nem (teljesen) függetlenek.

9. Igazolja, hogy ha A, B és C független események, akkor $A \cup B$ és C is függetlenek.

10. Egy versenyen 8 teniszjátékos indul. Bármely fordulóban a sorsolás véletlenszerű, és bármelyik játékos $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyer. Mennyi a valószínűsége, hogy két adott játékos összekerül a versenyen?

11. A férfiak 5%-a, a nőknek pedig $\frac{1}{4}$%-a színtévesztő. Egy 60 férfiból és 80 nőből álló csoportból véletlenszerűen kiválasztunk egy személyt.

a. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott személy színtévesztő?

b. A kiválasztott személy színtévesztő. Mekkora a valószínűsége, hogy férfi?

12. Egy üzemben 4 gépen gyártanak egyforma termékeket. Az egyik napon az első gépen 1000, a második gépen 900, a harmadik gépen 850, a negyedik gépen pedig 950 terméket készítenek. Az egyes gépeken a selejt előfordulásának a valószínűsége rendre 1%, 2%, 3% és 2%. Az elkészült termékeket egy közös raktárban gyűjtik. A napi termelésből véletlenszerűen kiválasztunk egy terméket.

a. Mennyi a valószínűsége, hogy selejteset választottunk?

b. Amennyiben hibátlannak találjuk a kivett terméket, mennyi a valószínűsége, hogy a második gép gyártotta?

13. Annak a valószínűsége, hogy egy 50 éves ember szívbetegségben szenved 0,01. Egy vizsgálat 90%-os megbízhatósággal kimutatja a betegséget (P(a vizsgálat eredménye pozitív | a vizsgált személy szívbetegségben szenved) = 0,9). Egy véletlenszerűen választott 50 éves embernél a vizsgálat eredménye pozitív. Mekkora a valószínűsége, hogy szívbeteg?

14. Vérátömlesztés esetén meg kell határozni a donor és a beteg vércsoportját. A 4-es vércsoportba tartozó beteg bármilyen vért kaphat, a 2-es vagy a 3-as vércsoportba

tartozó vagy csak a saját vércsoportjából, vagy az 1-es vércsoportból kaphat, az 1-es vércsoportba tartozó pedig csak az 1-esből kaphat. A lakosság 30%-a 1-es, 40%-a 2-es, 20%-a 3-as és 10%-a 4-es vércsoportú.

a. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen érkező betegnek egy véletlenszerűen választott donor vére adható?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy a vérátömlesztés megtörténhet, ha két donor van?

15. Annak a valószínűsége, hogy egy férfi gépkocsivezető balesetet okoz egy adott évben $\alpha \in]0,1[$, függetlenül más évektől. Ugyanez a valószínűség a nőknél $\beta \in]0,1[$. Véletlenszerűen választunk egy személyt olyan vezetni tudó népességből, amelyben a férfiak és a nők aránya $\gamma > 0$.

a. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott személy balesetet okoz ebben az évben?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott személy balesetet okoz kettő egymást követő évben?

c. Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a kiválasztott személy balesetet okoz egy évben, A_2 pedig azt, hogy a következő évben balesetet okoz. Igazolja, hogy $P(A_2|A_1) \geq P(A_1)$.

d. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott személy nő, feltéve, hogy balesetet okozott?

(A $\gamma = 1$ esetén legegyszerűbb a számolás)

16. Egy szigeten $(n+2)$-en élnek. Az egyik személyt meggyilkolják, a tettes is a sziget lakója. A helyszínen olyan DNS mintát találnak, amely az emberek p-ed $(0<p<1)$ részére jellemző. Az első kihallgatott szigetlakó DNS profilja megegyezik a helyszínen talált mintával. Mekkora a valószínűsége, hogy ő a gyilkos?

17. n-szer egymás után feldobunk egy szabályos érmét. Jelölje A azt az eseményt, hogy legfeljebb egy fejet dobunk, B pedig azt az eseményt, hogy legalább egy fejet és legalább egy írást dobunk. Igazolja, hogy az A és B pontosan akkor függetlenek, ha n = 3.

18. Egy kutató szeretné meghatározni két gyógyszer relatív hatékonyságát. Az eredmények:

nők	1. gyógyszer	2. gyógyszer
hatásos	200	10
nem hatásos	1800	190

férfiak	1. gyógyszer	2. gyógyszer
hatásos	19	1000
nem hatásos	1	1000

Melyik gyógyszer a hatásosabb? Két lehetséges válasz:

a. Az 1. gyógyszert 2020 embernek adták, közülük 219-nél hatásos volt. A 2. gyógyszert 2200 embernek adták, közülük 1010-nél hatásos volt. Ez alapján a 2. gyógyszer jobb.

b. Kizárólag a nőket tekintve az 1. gyógyszer a jobb, míg csak a férfiakat tekintve szintén az 1. gyógyszer a jobb. Ez alapján az 1. gyógyszer a jobb.

Melyik esetet fogadjuk el, és miért?