A nagy számok törvényei

1. Tekintsük v. v.-nak (X) egy pénztárnál megváltott jegyek számát. A megfigyelések szerint $E(X)=600$ és $D(X)=80$.
a. Legalább mekkora valószínűséggel esik a megváltott jegyek száma 280 és 920 közé?
b. Legfeljebb mekkora valószínűséggel esik a megváltott jegyek száma a $]300, 900[$ intervallumon kívül?

2. Egy meghatározott időben, egy újságárus 15 perc alatt eladott újságjainak a száma Poisson eloszlású v. v. 10 várható értékkel.
a. Adja meg: $P(6 < X < 14)$.
b. Adjon alsó becslést a $P(6 < X < 14)$ valószínűségre a Csebisev-Markov egyenlőtlenség felhasználásával.

3. Egy szabályos érmét 100-szor feldobunk. Milyen határok közé esik az írás dobásának a relatív gyakorisága
a. 0,75 b. 0,85 c. 0,95 valószínűséggel?

4. Hányszor kell egy szabályos érmét feldobni, ha azt akarjuk hogy az írás dobásának a relatív gyakorisága legalább
a. 0,75 b. 0,8 c. 0,9 valószínűséggel a $]0,4; 0,6[$ intervallumba essék?

5. Egy szabályos kockát egymás után feldobunk. Hány dobást kell végeznünk, ha azt akarjuk, hogy a 6-os dobásának a relatív gyakorisága az $\frac{1}{6}$ valószínűséget 0,1-nél kisebb hibával legalább 90% valószínűséggel közelítse meg?

6. Egy célpontra 200 lövést adunk le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Milyen határok közé esik legalább 0,9 valószínűséggel a találatok száma?

7. Közvéleménykutatás céljából az utcai járókelők közül néhányat megkérdeznek. A járókelők 35%-a 25 éven aluli. Legalább hány embert kell megkérdezni, hogy 95%-os valószínűséggel állíthassuk: a mintában a 25 éven aluliak ará-

nya a kérdéses valószínűségtől legfeljebb 0,2-del tér el? 2

8. Egy 3 emeletes áruház földszintjén egyszerre hatan szállnak be a liftbe. Ismeretes, hogy a vásárlók az egyes emeleteken rendre 35%, 42% és 23% valószínűséggel szoktak kiszállni.

a. Mennyi a valószínűsége, hogy az 1. emeleten legalább ketten szállnak ki?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy emeletenként pontosan ketten szállnak ki?

c. Legalább hányan utaztak a liftben, ha legalább 0,9 valószínűséggel igaz azon állításunk, hogy a 3. emeleten kiszállók relatív gyakoriságának a várható értéktől való eltérése kisebb volt 0,5-nél?

9. Legyenek $X_1, \dots, X_n, \dots$ független v. v.-k, amelyekre $P_{X_n} = \mathrm{Poi}(3)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Mekkora n esetén teljesül, hogy az átlagnak a várható értéktől való eltérése 0,05-nál kisebb 0,9 valószínűséggel?

10. Egy kaszinóban egy játékon 0,49 valószínűséggel nyerünk 1Ft-ot, és 0,51 valószínűséggel vesztünk 1Ft-ot. Egymás utáni játékok sorozatát olyan $X_1, \dots, X_n, \dots$ v. v.-kal modellezhetjük amelyek függetlenek, és $P(X_n = 1) = 0{,}49$, $P(X_n = -1) = 0{,}51$, $n \in \mathbb{N}^+$. A nagy számok gyenge vagy erős törvényét felhasználva adjunk magyarázatot arra a megfigyelésre, hogy elegendően sok játék után szinte biztosan vesztünk.

11. Legyen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos. Legyenek $X_1, \dots, X_n, \dots$ független v. v.-k, amelyekre $P_{X_n} = \mathrm{Uni}([0,1])$, $n \in \mathbb{N}^+$. Legyen $Y_n = g \circ X_n$, $n \in \mathbb{N}^+$. A nagy számok erős törvényének az alkalmazásával igazolja, hogy $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{m.m.} \int_0^1 g$.