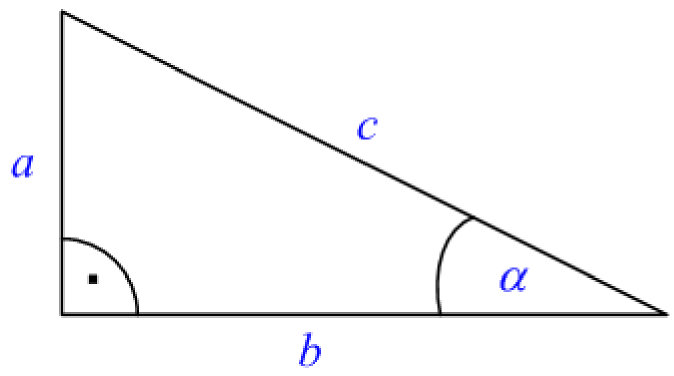
Trigonometria

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

Hegyesszögek szögfüggvényei



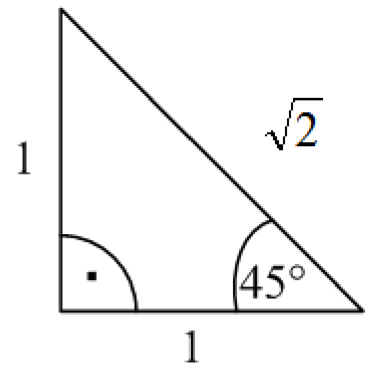
$$\sin\alpha = \frac{\text{szöggel szembeni befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{a}{c}$$

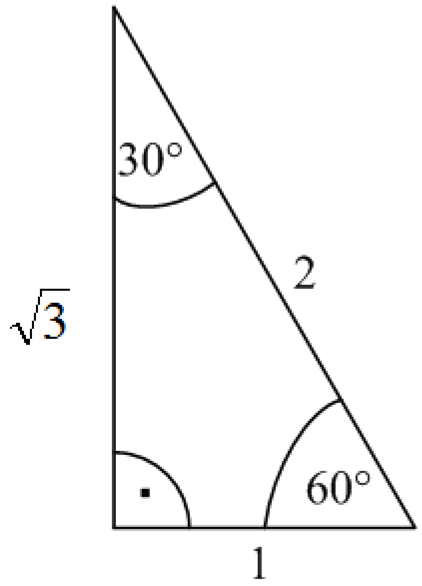
$$\cos\alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{b}{c}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{szöggel szembeni befogó}}{\text{szög melletti befogó}} = \frac{a}{b}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szembeni befogó}} = \frac{b}{a}$$

Nevezetes hegyesszögek szögfüggvényei





	30°	45°	60°
sin	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$

Szögek ívmértéke

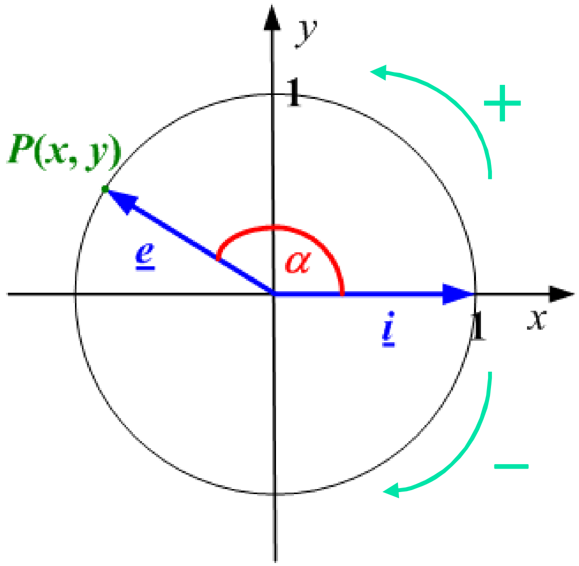
- Szögek mérésére ívmértéket (radián) is használhatunk.
- 1 radián nagyságú az r sugarú kör azon központi szöge, amelyhez tartozó ív hossza r.
- Néhány nevezetes szög ívmértéke:

$$360^\circ = 2\pi \text{ (rad)}$$
$$180^\circ = \pi$$
$$90^\circ = \pi/2$$
$$45^\circ = \pi/4$$
$$60^\circ = \pi/3$$
$$30^\circ = \pi/6$$

- Az ívmérték lehetővé teszi, hogy a szögeket valós számokkal mérjük.

Forgásszögek szinusza, koszinusza

Legyen $\underline{e}$ egységnyi hosszúságú helyvektor, amelyet α szöggel elforgatunk az $\underline{i}$ vektorhoz képest. Ekkor $\underline{e}$ végpontjának koordinátái:



$$P(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

A definícióból következően:

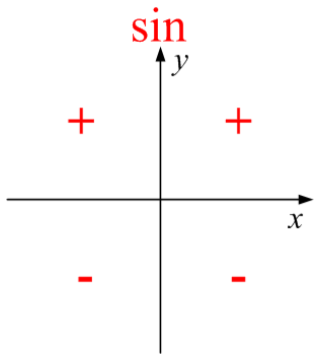
$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ és $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

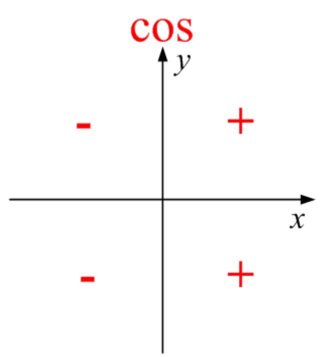
$\sin\alpha = \sin(\alpha + k\cdot 360^{\circ})$, ill. $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$

$\cos\alpha = \cos(\alpha + k\cdot 360^{\circ})$, ill. $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$

Forgásszögek szinusza, koszinusza (folyt.)

Az előjelek az egyes síknegyedekben:





Forgásszögek és a megfelelő hegyesszög kapcsolata:

I.	II.	III.	IV.
α (°) α(rad)	$180° - \alpha$ $\pi - \alpha$	$\alpha - 180°$ $\alpha - \pi$	$360° - \alpha$ $2\pi - \alpha$

Példa: Mennyi $\cos 240°$?

$\alpha = 240°$ $\Rightarrow$ III. síknegyed $\Rightarrow$ a megfelelő hegyesszög: $\beta =$

$= \alpha - 180° = 60°$ $\Rightarrow$ III. síknegyedben a koszinusz negatív, így:

$\cos 240° = -\cos 60° = -1/2$

Szinusz, koszinusz szögfv.-ek azonosságai

Tetszőleges α szögre igazak:

Pótszögekre: $\sin\alpha = \cos(\pi/2 - \alpha)$

$\cos\alpha = \sin(\pi/2 - \alpha)$

Kiegészítő szögekre: $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$

$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$

Negatív szögekre: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Pitagoraszi összefüggés: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Továbbá: $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$

$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha$

$\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin\alpha$

Forgásszögek tangense és kotangense

Tangens:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$$

Kotangens:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in Z$$

Azonosságok: minden lehetséges értelmezésre:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

További összefüggések:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$