

VEMIMAP146B - 3. gyakorló feladatsor

1. Vizsgálja meg, hogy az alábbi relációk közül melyik reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, dichotom illetve tranzitív:

- (a) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2: |a| = |b|\}$
- (b) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2: a^2 \leq b^2\}$
- (c) $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2: a < b - 1\}$
- (d) $\{(n, m) \in \mathbb{Z}^2: n - m \text{ páros}\}$
- (e) $\{(n, m) \in \mathbb{Z}^2: n - m \text{ páratlan}\}$
- (f) $\{(n, m) \in \mathbb{Z}^2: n|m, n \neq m\}$
- (g) $\{(p, q): p, q \text{ azonos fokszámú polinom}\}$
- (h) $\{(p, q): p \text{ kisebb vagy egyenlő fokszámú polinom, mint } q\}$
- (i) $\{(e, f): e \text{ és } f \text{ egymást metsző síkbeli egyenesek}\}$
- (j) $\{(e, f): e \text{ és } f \text{ egymásra merőleges síkbeli egyenesek}\}$
- (k) $\{(e, f): e \text{ és } f \text{ síkbeli egyenesek távolsága az origótól egyenlő}\}$
- (l) $\{(A, B): A, B \subseteq X, A \cap B \neq \emptyset\}$
- (m) $\{(A, B): A, B \subseteq X, x_0 \in A \cap B\}$, ahol $x_0 \in X$ rögzített.

2. Tekintsük az (X, \subseteq) részbenrendezett halmazt, ahol X az alábbi módon van definiálva:

- (a) $X = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 5\}\}$
- (b) $X = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}\}$
- (c) $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

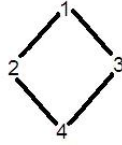
Ábrázolja a részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját! Határozza meg a maximális, a minimális, a legnagyobb és a legkisebb elemeket!

3. Legyen $D_n = \{k \in \mathbb{N}: k|n, k > 1\}$, és definiálja az $|$ osztója reláció a részbenrendezést D_n -en. Rajzolja fel a

- (a) D_{30}
- (b) D_{27}
- (c) D_{60}
- (d) $D_{24} \cup D_{27}$

részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Határozza meg a maximális, a minimális, a legnagyobb és a legkisebb elemeket!

4. Definiáljuk az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazon a \leq részbenrendezést az alábbi Hasse-diagrammal:



(a)



(b)

Melyek igazak az (A, \leq) részbenrendezett halmazban az alábbi állítások közül?

$$1 \leq 4, \quad 4 \leq 1, \quad 3 \leq 2, \quad 2 \leq 3$$

Határozza meg a maximális, a minimális, a legnagyobb és a legkisebb elemeket!

5. Adjon példát olyan részbenrendezett halmazra, amelynek
- pontosan három minimális eleme van;
 - egy minimális eleme van, de nincs legkisebb eleme;
 - két maximális és két minimális eleme van.
6. Igazolja, hogy az adott reláció ekvivalenciareláció! Adja meg az ekvivalenciaosztályokat!
- $\{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : n - m \text{ osztható hárommal}\}$
 - $\{(e, f) : e \text{ és } f \text{ síkbeli egyenesek távolsága az origótól egyenlő}\}$
 - $\{(P, Q) : P \text{ és } Q \text{ síkbeli pontok távolsága a sík egy rögzített egyenesétől egyenlő}\}$
 - $\{(P, Q) : P \text{ és } Q \text{ síkbeli pontok távolsága a sík egy rögzített pontjától egyenlő}\}$
 - $\{(A, B) : A, B \subseteq X, A \text{ és } B \text{ véges és egyenlő elemszámú, vagy mindkettő végtelen}\}$
(X rögzített halmaz)
7. Adjon példát olyan ekvivalenciarelációra, amelynek pontosan két darab kételemű és két darab négyelemű ekvivalenciaosztálya van!