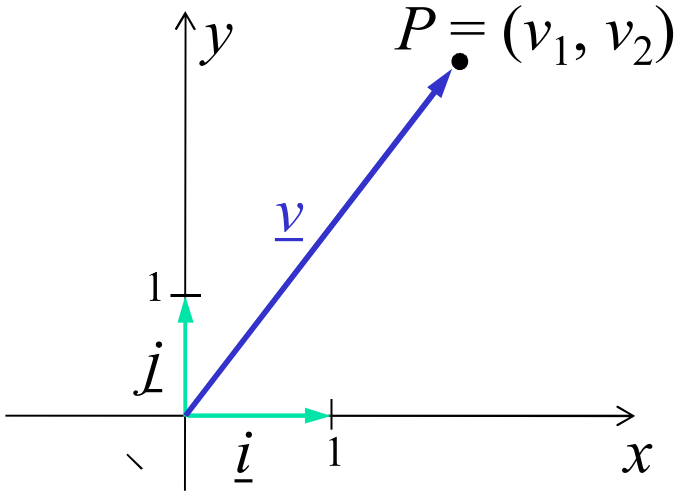
Koordináta-geometria

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

Vektorok a koordináta-rendszerben



A síkbeli vektorokat helyvektorokként helyezzük el a síkbeli, derékszögű (Descartes-féle) koordináta-rendszerben.

Ekkor minden síkbeli vektor egyértelműen felbontható a koordináta-tengelyek irányába eső összetevőkre:

$$\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j}$$

Vektorok koordináta-rendszerben (folyt.)

- A $\underline{v}$ vektor koordináta-tengelyek irányába eső összetevői: $v_1 \cdot \underline{i}\,, \quad v_2 \cdot \underline{j}$
- A $\underline{v}$ vektor koordinátái: $v_1, \; v_2$
- Megjegyzés: A $\underline{v}$ helyvektor koordinátái azonosak végpontjának koordinátáival.

  Jel.: $\underline{v} = (v_1, v_2)$
- A $\underline{v}$ vektor hossza (a Pitagorasz-tétel alapján):

$$|\,\underline{v}\,| = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}$$

Vektorműveletek koordinátákkal

Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ síkbeli vektorok, $\lambda \in R$ skalár.

- Összeadás:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2)$$

- Skalárral való szorzás:

$$\lambda \cdot \underline{a} = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2)$$

- A különbség:

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2)$$

- Skaláris szorzás:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Ponthalmaz, görbe egyenlete

Egy adott görbe egyenletének azt az egyenletet nevezzük, amelyet a görbéhez tartozó összes pont koordinátái, és csak ezen pontok koordinátái elégítenek ki.

Vizsgált görbék:

- egyenes
- kör

Egyenes

Általános egyenlet: $$a\,x + b\,y = c$$

- Ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor az x tengellyel párhuzamos az egyenes,
- Ha $a \neq 0$ és $b = 0$, akkor az y tengellyel párhuzamos az egyenes,
- Ha $c = 0$, akkor az origón áthaladó az egyenes,
- Az a és b egyszerre nem lehet nulla.

Az egyenes különböző egyenletei

1. Meredekség, tengelymetszet alapján: $y = m\,x + b$
   - m: az egyenes meredeksége,
   - b: megmutatja, hogy az egyenes hol metszi az y tengelyt.

   Ez az alak nem használható, ha az egyenes párhuzamos az y tengellyel.

2. Meredekség, adott pont alapján: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$
   - m: az egyenes meredeksége,
   - $P_0(x_0, y_0)$ az egyenes egy adott pontja.

   Ez az alak nem használható, ha az egyenes párhuzamos az y tengellyel.

Az egyenes különböző egyenletei (folyt.)

3. Két adott pont alapján: $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

- $P_1(x_1,y_1)$ és $P_2(x_2,y_2)$ az egyenes két adott pontja.

Az y tengellyel párhuzamos egyenes esetén a fenti egyenlet az alábbi formában használható: $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$

4. Egy adott pont és egy irányvektor alapján:

$$v_2\, x - v_1\, y = v_2\, x_0 - v_1\, y_0$$

- $P_0(x_0,y_0)$ az egyenes egy adott pontja,
- $\underline{v}(v_1,v_2)$ az egyenes egy irányvektora.

Az egyenes különböző egyenletei (folyt.)

5. Egy adott pont és egy normálvektor alapján:

$$A\,x + B\,y = A\,x_0 + B\,y_0$$

- $P_0(x_0,y_0)$ az egyenes egy adott pontja,
- $\underline{n}(A,B)$ az egyenes egy normálvektora.

Egyenesek párhuzamossága, merőlegessége

- Két egyenes párhuzamos, ha
  - irányvektoraik párhuzamosak,
  - normálvektoraik párhuzamosak,
  - meredekségük egyenlő, vagy nincs nekik.

- Két egyenes merőleges, ha
  - irányvektoraik merőlegesek (skaláris szorzatuk 0),
  - normálvektoraik merőlegesek (skaláris szorzatuk 0),
  - meredekségük szorzata -1, vagy az egyiknek 0 és a másiknak nincs.

Kör egyenlete

Kör egyenlete: $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$

ahol:

- $K(u,v)$ a kör középpontja,
- r a kör sugara.