Bevezetés a matematikába I. - VEMIMAP146B

V. Komplex számok

Hartung Ferenc

Pannon Egyetem
Matematika Tanszék

2018

A valós számok körében bizonyos másodrendű egyenleteknek nincs megoldása. Ilyen például az $x^2 = -1$ egyenlet. Jelöljön i egy olyan "számot", amelyre teljesül az

$$i^2 = -1$$

azonosság. Azaz az i számot a -1 négyzetgyökének tekinthetjük. Az i szimbólumot képzetes egységnek (vagy imaginárius egységnek) nevezzük. Ekkor megoldható lesz például a

$$z^2 = -4$$

egyenlet. Ehhez tekintsük az alábbi formális számolást

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i.$$

Ekkor $z_1 = 2i$ megoldása az egyenletnek. Persze $z_2 = -2i$ is megoldás, mivel $z_2^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$ teljesül.
Célunk, hogy kibővítsük a valós számok halmazát az i konstanssal, úgy, hogy a megszokott aritmetikai műveletek értelmezhetőek legyenek és a valós számok körében megszokott azonosságok teljesüljenek.

Definíció:

Az $a + bi$ *alakú kifejezéseket* ***komplex számoknak*** *nevezzük. A komplex számok halmaza* $\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$. *A* $z = a + bi$ *formulát a* z *komplex szám* ***normál alakjának*** *nevezzük.*

Példa:

$-2.1 + 5i$, $3 - 1i = 3 - i$, $6.5 + 0i = 6.5$ komplex számok

Megjegyezzük, hogy $0i = 0$ és $1i = i$ definíció szerint. Ezért $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, hiszen $x = x + 0i$. A bi és az ib kifejezéseket azonosnak tekintjük, így a komplex számot $z = x + yi = x + iy$ alakban is írhatjuk.

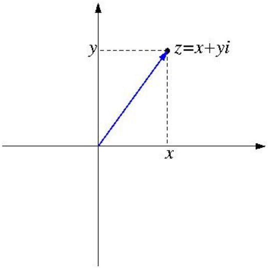
Definíció:

A $z = x + yi$ *komplex szám* ***valós részén*** *az* x *számot,* ***képzetes részén*** *pedig az* y *számot értjük. Jelölése:* $\mathrm{Re}\, z = x$ *és* $\mathrm{Im}\, z = y$.

Példa:

Legyen $z = -5 + 7i$. Ekkor $\mathrm{Re}\, z = -5$ és $\mathrm{Im}\, z = 7$.

Egy $z = x + yi$ komplex számot egy síkbeli koordinátarendszerben, az ú.n. komplex síkon ábrázolunk: az (x, y) koordintátájú pontot rendeljük a z komplex számhoz. És fordítva, egy síkbeli pont egyértelműen meghatároz egy komplex számot.

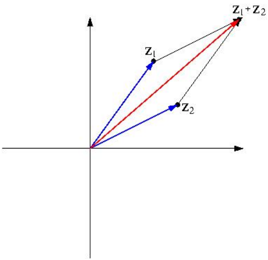


Egy síkbeli ponthoz pedig hozzárendeljük az origóból az adott pontba mutató helyvektort. A komplex számok, a síkbeli pontok és a helyvektorok tehát azonosíthatók egymással.

A komplex sík vízszintes koordinátatengelyét valós tengelynek, a függőleges tengelyt pedig képzetes tengelynek hívjuk.

Definíció:

Legyenek $z_1 = x_1 + y_1 i$ *és* $z_2 = x_2 + y_2 i$ *komplex számok. Ekkor* $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$,



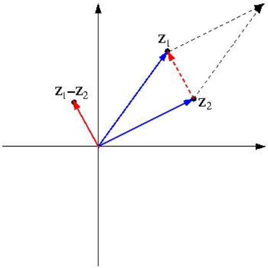
Példa:

Legyen $z_1 = -2 + 5i$ és $z_2 = 4 + 3i$. Ekkor

$$z_1 + z_2 = -2 + 5i + 4 + 3i = 2 + 8i.$$

Definíció:

Legyenek $z_1 = x_1 + y_1 i$ *és* $z_2 = x_2 + y_2 i$ *komplex számok. Ekkor* $z_1 - z_2 := (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$,



Példa:

Legyen $z_1 = -2 + 5i$ és $z_2 = 4 + 3i$. Ekkor

$$z_1 - z_2 = -2 + 5i - (4 + 3i) = -6 + 2i.$$

Definíció:

Legyenek $z_1 = x_1 + y_1 i$ *és* $z_2 = x_2 + y_2 i$ *komplex számok. Ekkor legyen* $z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$.

A definícióban szereplő képletet megkapjuk úgy is, ha a szokásos módon beszorozzuk a zárójelben szereplő tagokat:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \end{aligned}$$

Példa:

Legyen $z_1 = -2 + 5i$ és $z_2 = 4 + 3i$. Ekkor

$$z_1 z_2 = (-2+5i)(4+3i) = -8-6i+20i+15i^2 = -8-6i+20i-15 = -23+14i.$$

Két komplex szám hányadosát az alábbi módon tudjuk kiszámítani:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \\
&= \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} \\
&= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2 + x_2 y_2 i - x_2 y_2 i} \\
&= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.
\end{aligned}$$

Példa:

Legyen $z_1 = -2 + 5i$ és $z_2 = 4 + 3i$. Ekkor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2 + 5i}{4 + 3i} = \frac{(-2 + 5i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{-8 + 6i + 20i + 15}{16 + 9} = \frac{7}{25} + \frac{26}{25} i.$$

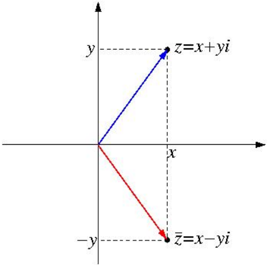
Tétel:

Legyenek z, z_1, z_2, z_3 tetszőleges komplex számok. Ekkor

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *(kommutativitás)*
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *(asszociativitás)*
3. $z + 0 = z$
4. $z - z = 0$
5. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ *(kommutativitás)*
6. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ *(asszociativitás)*
7. $z1 = z$
8. $z\frac{1}{z} = 1, \quad ha\ z \neq 0$
9. $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$
10. $z^n z^m = z^{n+m}$
11. $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n}, \quad ha\ z_2 \neq 0$

Definíció:

*A $z = x + yi$ komplex szám **komplex konjugáltján** a $\overline{z} := x - yi$ komplex számot hívjuk.*



Példa:

A $z = -2 + 5i$ szám konjugáltja $\overline{z} = -2 - 5i$.

Példa:

A $z = 6$ komplex szám konjugáltja $\overline{z} = 6 = z$.

Tétel:

Legyenek $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1 i$ és $z_2 = x_2 + y_2 i$ tetszőleges komplex számok. Ekkor

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
5. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
6. $z = \overline{z}$ *akkor és csak akkor, ha* $z \in \mathbb{R}$
7. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z, \qquad z - \overline{z} = (2\,\mathrm{Im}\,z)i$
8. $z\overline{z} = x^2 + y^2$

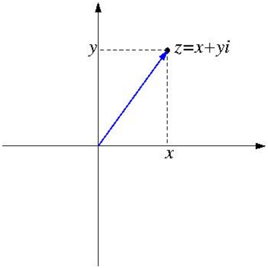
A komplex konjugált jelölését használva tehát a komplex számok hányadosát az alábbi módon számolhatjuk ki:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}$$

Definíció:

A $z = x + yi$ komplex szám abszolút értékén a $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ számot értjük.

A $|z|$ geometriai jelentése: a z komplex számot reprezentáló pont távolsága az origótól:



Megjegyezzük, hogy valós számokra a komplex abszolút érték és a valós abszolút érték megegyezik, hiszen ha $z = x + 0i$, akkor $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$.

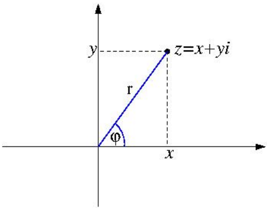
Tétel:

Legyenek $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1 i$ *és* $z_2 = x_2 + y_2 i$ *tetszőleges komplex számok. Ekkor*

1. $z\overline{z} = |z|^2$
2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
3. $|z| = |\overline{z}|$
4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

A 6. pont jobb oldali egyenlőtlenségét háromszög-egyenlőtlenségnek hívjuk.

Legyen $z = x + yi$ a $z \neq 0$ komplex szám normál alakja. Legyen φ a pozitív valós tengely és a z-hez tartozó helyvektor által közrezárt szög.



Ekkor

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Ebből kapjuk a

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

összefüggést, amit a z komplex szám trigonometrikus alakjának hívunk. Az $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ a komplex szám abszolút értéke vagy hossza, a φ szöget a z komplex szám argumentumának hívjuk, jelölése: $\varphi = \arg z$.

Megjegyezzük, hogy a 0 komplex szám argumentumát nem értelmezzük. A $z \neq 0$ komplex szám argumentuma 2π többszörösétől eltekintve egyértelmű, hiszen a $\varphi + 2k\pi$ minden $k \in \mathbb{Z}$-re ugyanazt az irányt adja vissza. A φ szöget például a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

összefüggésből határozhatjuk meg, figyelembe véve, hogy a z komplex szám melyik síknegyedben helyezkedik el.

Példa:

Határozzuk meg a $z = -1 + i$ komplex szám trigonometrikus alakját! $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{-1} = -1$, és mivel z a II. síknegyedben helyezkedik el, ezért $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Így z trigonometrikus alakja:

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Példa:

Határozzuk meg a $z = -8$ komplex szám trigonometrikus alakját!
Mivel a -8 a negatív valós tengelyen helyezkedik el, ezért az argumentuma $\varphi = \pi$. Az abszolút értéke pedig $r = |-8| = 8$. Így a trigonometrikus alakja:

$$-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi).$$

A -8 argumentumát például $-\pi$-nek is választhatjuk, így egy másik lehetséges formában felírt trigonometrikus alak:

$$-8 = 8(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)).$$

Tétel:

Legyen $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *és* $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$. *Ekkor* $z = w$ *akkor és csak akkor, ha* $r = s$ *és* $\varphi = \psi + 2k\pi$ *valamely* $k \in \mathbb{Z}$*-re.*

Bizonyítás

$z = w$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, w$ és $\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, w$, azaz ha

$$r\cos\varphi = s\cos\psi \qquad \text{és} \qquad r\sin\varphi = s\sin\psi. \tag{1}$$

Nyilván, ha $r = s$ és $\varphi = \psi + 2k\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-re, akkor (1) teljesül, azaz $z = w$.

Fordítva, tegyük fel, hogy (1) teljesül. A két egyenlet négyzetösszege

$$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = s^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi),$$

amiből $r^2 = s^2$, és így $r = s$ következik. Ekkor (1) egyszerűsíthető r-rel, azaz

$$\cos\varphi = \cos\psi \qquad \text{és} \qquad \sin\varphi = \sin\psi$$

következik. Ebből következik, hogy $\varphi = \psi + 2k\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-re.

Tétel:

Tetszőleges $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *és* $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ *nem 0 komlex számokra*

1. $\overline{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$
2. $zw = rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$
3. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{r}{s}\Big(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\Big)$
4. $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ *minden* $n \in \mathbb{Z}$*-re*

A fenti 4-es azonosságot de Moivre formulának hívjuk.

Példa:

Számítsuk ki a $(-1+i)^{50}$ értékét!

Láttuk korábban, hogy

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Ezért a de Moivre formula szerint

$$\begin{aligned}(-1+i)^{50}&=(\sqrt{2})^{50}\left(\cos\frac{150\pi}{4}+i\sin\frac{150\pi}{4}\right)\\&=2^{25}\left(\cos\left(36\pi+\frac{6\pi}{4}\right)+i\sin\left(36\pi+\frac{6\pi}{4}\right)\right)\\&=2^{25}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\\&=-2^{25}i.\end{aligned}$$

Tétel:

Legyen $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$. *Ekkor*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Példa:

Számítsuk ki $\sqrt[3]{-1+i}$ összes lehetséges értékét!
Korábban láttuk, hogy $-1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$. Ezért a három különböző gyök értéke:

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

Példa:

Számítsuk ki $\sqrt{-8}$ összes lehetséges értékét!
Korábban láttuk, hogy $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$. Ezért a lehetséges gyökök:

$$\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{8}i$$

$$\sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{8}i$$

Példa:

Számítsuk ki $\sqrt[4]{-8}$ összes lehetséges értékét!
Korábban láttuk, hogy $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$. Ezért a lehetséges gyökök:

$$\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}i$$

$$\sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}i$$

$$\sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2}i$$

$$\sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2}i$$

Példa:

Fejezzük ki $\cos 5x$-et $\sin x$ és $\cos x$ segítségével!

Tekintsük a $z = \cos x + i \sin x$ komplex számot. Ekkor

$$z^5 = \cos 5x + i \sin 5x$$

a de Moivre képlet szerint. Másrészt

$$\begin{aligned} z^5 &= (\cos x + i \sin x)^5 \\ &= \cos^5 x + 5\cos^4 x(i \sin x) + 10\cos^3 x(i \sin x)^2 + 10\cos^2 x(i \sin x)^3 \\ &\quad + 5\cos x(i \sin x)^4 + (i \sin x)^5 \\ &= \cos^5 x + i5\cos^4 x \sin x - 10\cos^3 x \sin^2 x - i10\cos^2 x \sin^3 x \\ &\quad + 5\cos x \sin^4 x + i \sin^5 x. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$$
$$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

Definíció:

Legyen a z komplex szám trigonometrikus alakja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *A*

$$z = re^{\varphi i}$$

képletet a z komplex szám exponenciális alakjának nevezzük.

A fenti definícióból látszik, hogy az exponenciális függvényt a tiszta képzetes kitevő esetére az

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

képlettel definiáljuk. Ezt a formulát Euler-formulának hívjuk. Ha az Euler-formulába $-\varphi$-t helyettesítünk, akkor az

$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

összefüggést kapjuk. Ekkor összeadva illetve kivonva ezt az Euler-formulából, kapjuk a

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i}$$

formulákat, amelyeket szintén Euler-formuláknak nevezünk.

Az Euler-formula segítségével értelmezhető az exponenciális függvény komplex kitevő esetén. Legyen $z = x + yi$. Ekkor az

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

képlettel értelmezzük az exponenciális függvényt.

A koszinusz és szinusz függvényeket pedig az Euler-formulákkal terjesztjük ki a komplex változó esetére:

$$\cos z := \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \qquad \sin z := \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$$