Az R^3 tér geometriája

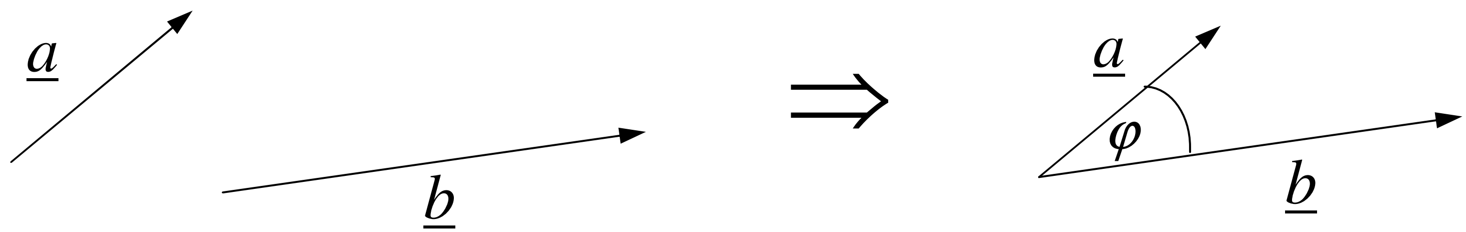
Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

2008.09.08.

Vektorok

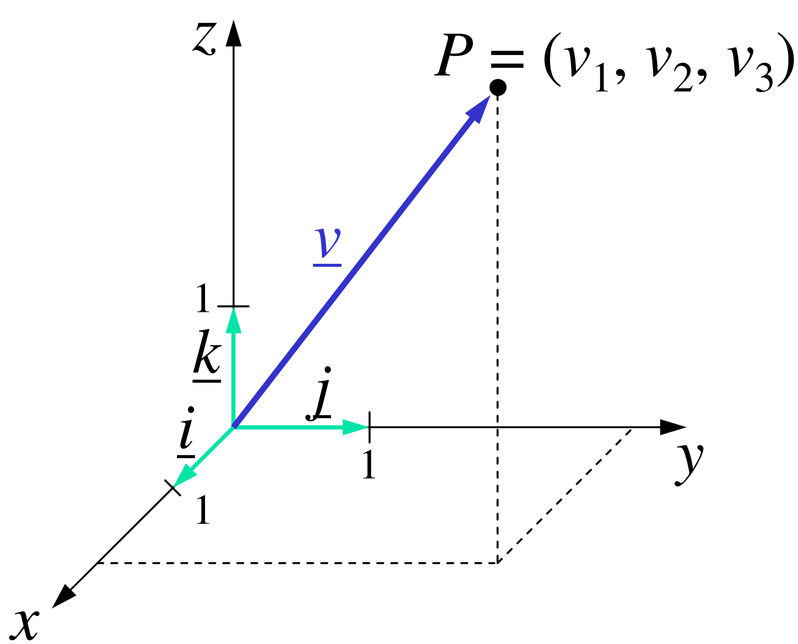
- Vektor: irányított szakasz
  Jel.: $\underline{a}$, $\mathbf{a}$, $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$,
  Jellemzői:
  - irány,
  - hosszúság, (abszolút érték) jel.: $|\underline{a}|$
- Speciális vektorok:
  - nullvektor: hossza 0, iránya tetszőleges. Jel.: $\underline{0}$, $\underline{o}$
  - egységvektor: hossza egységnyi.
- Megjegyzés: az azonos hosszúságú és irányú, de különböző kezdőpontú vektorokat azonosaknak tekintjük.

Két vektor szöge



- A vektorokat közös kezdőpontba tolva az általuk meghatározott félegyenesek szöge Jel.: $\angle(\underline{a},\underline{b}) = \varphi$
- Speciálisan:
  - Ha $\varphi = 0°, \Rightarrow \underline{a}$ és $\underline{b}$ azonos irányú, (párhuzamos)
  - Ha $\varphi = 180°, \Rightarrow \underline{a}$ és $\underline{b}$ ellentétes irányú, (párhuzamos)
  - Ha $\varphi = 90°, \Rightarrow \underline{a}$ és $\underline{b}$ merőleges.

Vektorok koordináta-rendszerben



A vektorokat helyvektorok-ként helyezzük el a térbeli, derékszögű (Descartes-féle) koordináta-rendszerben.

Ekkor minden térbeli vektor egyértelműen felbontható a koordináta-tengelyek irányába eső összetevőkre:

$$\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j} + v_3 \cdot \underline{k}$$

Vektorok koordináta-rendszerben (folyt.)

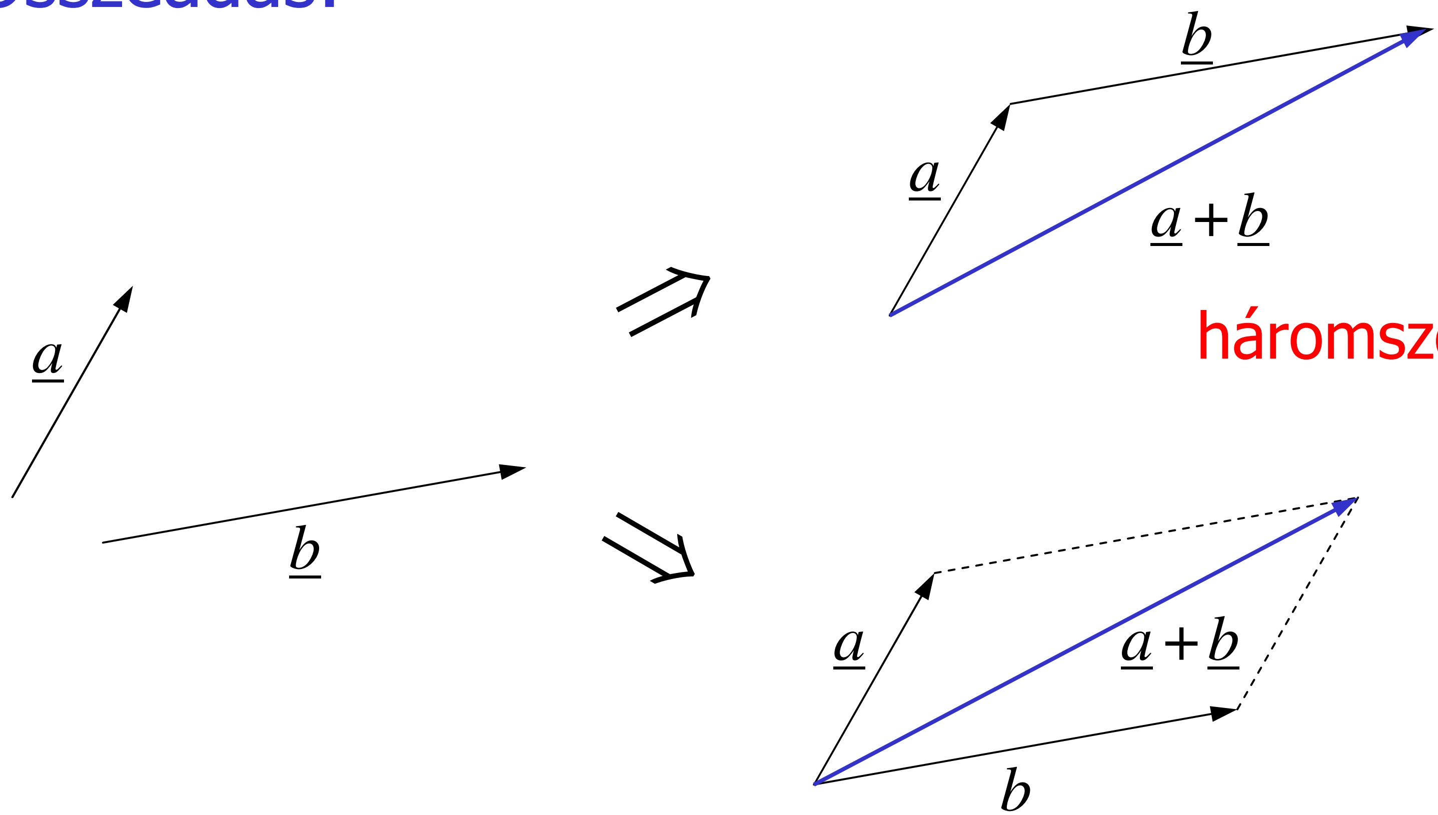
- A $\underline{v}$ vektor koordináta-tengelyek irányába eső összetevői: $v_1 \cdot \underline{i}\ , \quad v_2 \cdot \underline{j}\ , \quad v_3 \cdot \underline{k}$
- A $\underline{v}$ vektor koordinátái: $v_1, \ v_2, \ v_3$
- Megjegyzés: A $\underline{v}$ helyvektor koordinátái azonosak végpontjának koordinátáival.

  Jel.: $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$
- A $\underline{v}$ vektor hossza (a térbeli Pitagorasz-tétel alapján):

$$|\underline{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$$

Műveletek vektorokkal: összeadás

Összeadás:



háromszög-módszer

paralelogramma-módszer

ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamos

Összeadás (folyt.)

- Az összeadás tulajdonságai:

  Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ tetszőleges térbeli vektorok. Ekkor:

  $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ (asszociativitás)

  $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (kommutativitás)

  $\underline{a} + \underline{o} = \underline{a}$

  $|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

- Összeadás koordinátákkal:

  Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térbeli vektorok. Ekkor:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$$

Műveletek vektorokkal: skalárral való szorzás

- Skalárral való szorzás:

  Legyen $\underline{a}$ egy tetszőleges térbeli vektor, $\lambda \in R$ egy skalár. Ekkor:

  $\lambda \cdot \underline{a}$ az a vektor, amelynek
  - hossza: $|\lambda| \cdot |\underline{a}|$,
  - iránya:
    - azonos az $\underline{a}$ vektor irányával, ha $\lambda > 0$,
    - ellentétes az $\underline{a}$ vektor irányával, ha $\lambda < 0$,
    - tetszőleges, ha $\lambda = 0$.

Skalárral való szorzás (folyt.)

- A skalárral való szorzás tulajdonságai:

  Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges térbeli vektorok, $\lambda, \mu \in R$ skalárok. Ekkor:

  $$0 \cdot \underline{a} = \underline{o}$$

  $$\lambda \cdot \underline{o} = \underline{o}$$

  $$1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$$

  $$(\lambda+\mu) \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \underline{a} + \mu \cdot \underline{a}$$

  $$\lambda \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \cdot \underline{a} + \lambda \cdot \underline{b}$$

  $$\lambda \cdot (\mu \cdot \underline{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{a}$$

- Skalárral való szorzás koordinátákkal:

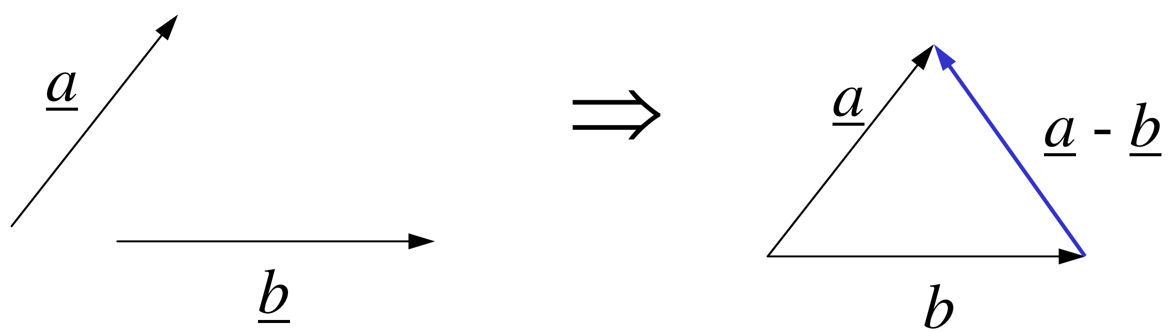
  Legyen $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy tetszőleges térbeli vektor, $\lambda \in R$ egy skalár. Ekkor:

  $$\lambda \cdot \underline{a} = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_3)$$

Műveletek vektorokkal: különbség

- Különbség (származtatott művelet):

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-1) \cdot \underline{b}$$



- A különbség számolása koordinátákkal:

Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térbeli vektorok. Ekkor:

$$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$$

Műveletek vektorokkal: skaláris szorzás

- Skaláris szorzás:

  Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges térbeli vektorok. Ekkor:

  $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot cos\varphi$, ahol φ a két vektor szöge.

Megjegyzés: a művelet eredménye skalár!

Skaláris szorzás (folyt.)

- A skaláris szorzás tulajdonságai:

Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges térbeli vektorok, $\lambda \in R$ skalár. Ekkor:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = |\,\underline{a}\,|^2 \quad \Rightarrow \quad |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a} = \underline{o} \text{ vagy } \underline{b} = \underline{o} \text{ vagy } \varphi = 90°$$

$$(\text{ azaz } \underline{a} \perp \underline{b}\ )$$

$$\lambda \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b}) = (\lambda \cdot \underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (\lambda \cdot \underline{b})$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$$

Skaláris szorzás (folyt.)

- Skaláris szorzás koordinátákkal:

  Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térbeli vektorok. Ekkor:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Műveletek vektorokkal: vektoriális szorzás

Vektoriális szorzás:

(Ez a művelet síkbeli vektorokra nem értelmezhető!)

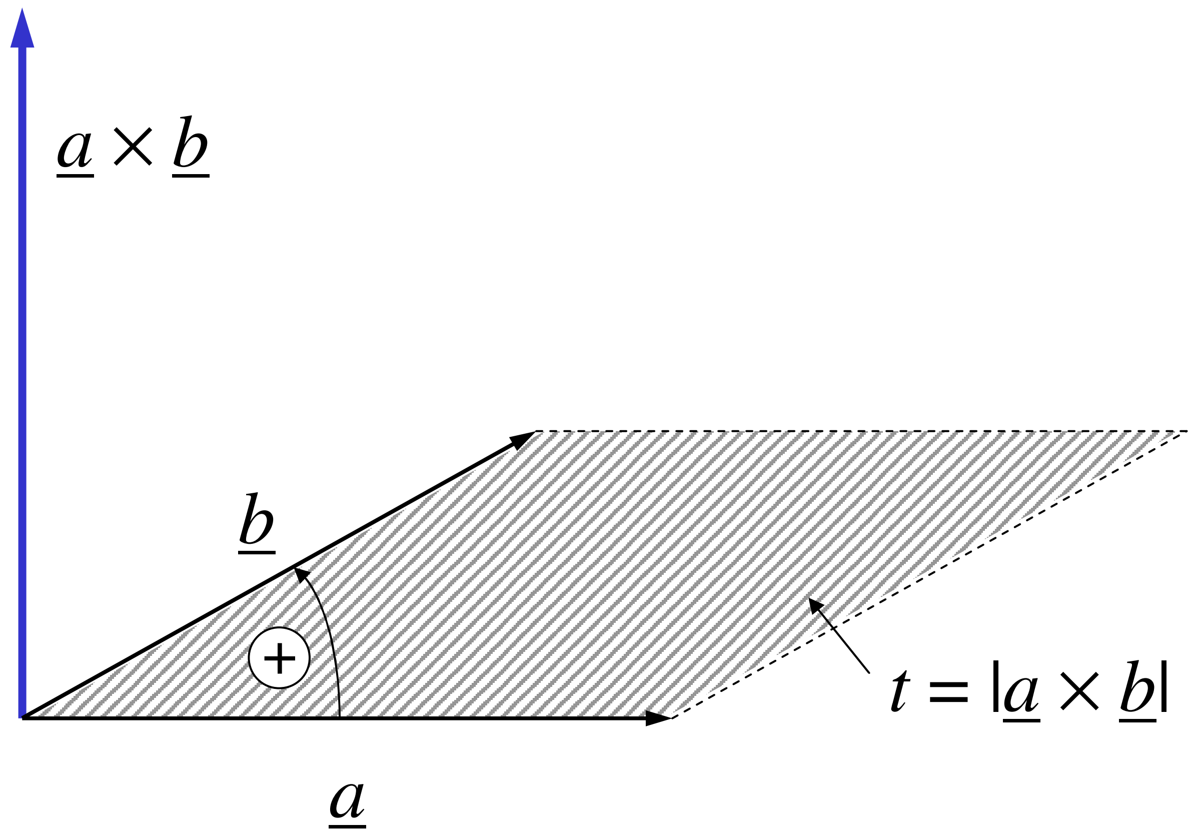
Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ tetszőleges térbeli vektorok. Ekkor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoriális szorzata (jel.: $\underline{a} \times \underline{b}$) az a vektor,

- amelynek hossza: $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\,\underline{a}\,| \cdot |\,\underline{b}\,| \cdot \sin\varphi$, ahol φ a két vektor szöge,
- amely merőleges az $\underline{a}$ vektorra és a $\underline{b}$ vektorra is,
- amelyre az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorok jobbrendszert alkotnak.

(azaz $\underline{a} \times \underline{b}$ oda mutat, ahonnan nézve az $\underline{a}$-t $\underline{b}$-be vivő, 180°-nál kisebb szögű forgatás pozitívnak látszik)

Vektoriális szorzás (folyt.)

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorok térbeli elhelyezkedése:



Vektoriális szorzás (folyt.)

A vektoriális szorzás tulajdonságai:

$$\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{b} \times \underline{a}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$$

$$\lambda \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = (\lambda \cdot \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\lambda \cdot \underline{b})$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$$

$$(\underline{b} + \underline{c}) \times \underline{a} = \underline{b} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{a}$$

$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{o} \iff \underline{a} = \underline{o}$ vagy $\underline{b} = \underline{o}$ vagy $\varphi = 0°$ vagy $\varphi = 180°$

(azaz $\underline{a} \parallel \underline{b}$)

Vektoriális szorzás (folyt.)

Vektoriális szorzás koordinátákkal:

Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térbeli vektorok. Ekkor:

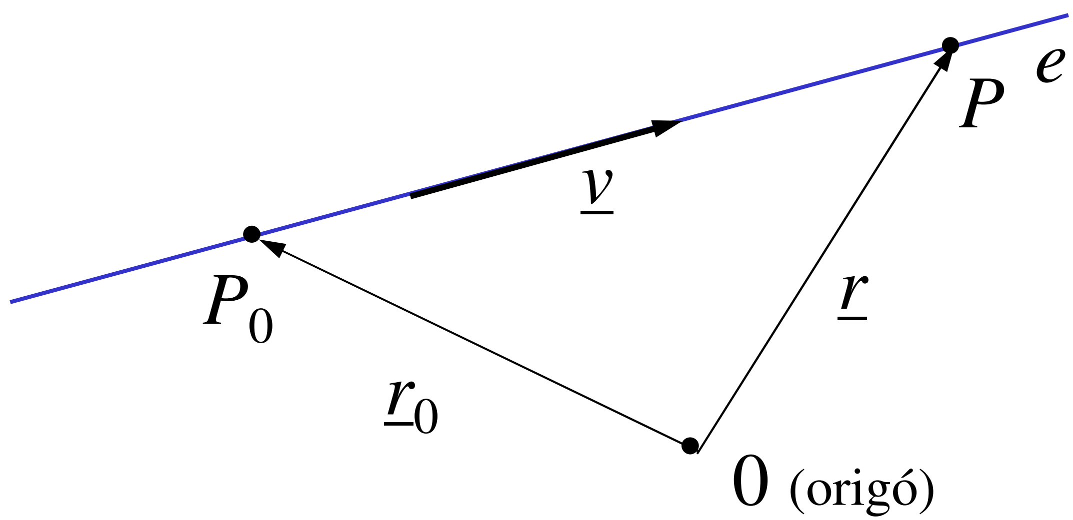
$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ -a_1 b_3 + a_3 b_1,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Az egyenes

Adott: $P_0=(x_0, y_0, z_0)$, az e egyenes egy pontja,

$\underline{v}=(v_1, v_2, v_3)$, az e egyenes egy irányvektora.

Legyen $P=(x, y, z)$ az e egyenes egy tetszőlegesen választott pontja. Jelölje $\underline{r}_0$ a P_0 pontba, $\underline{r}$ a P pontba mutató helyvektort.



Ekkor $\underline{r} = \underline{r}_0 + t \cdot \underline{v}$ teljesül valamely $t \in R$ valós paraméterre.

Megjegyzés: Térbeli egyeneseknél a normálvektor fogalmát nem használjuk.

Az egyenes (folyt.)

Az egyenes paraméteres vektoregyenlete:

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t \cdot \underline{v} \quad , \quad t \in R$$

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = x_0 + t \cdot v_1$$

$$y = y_0 + t \cdot v_2$$

$$z = z_0 + t \cdot v_3 \quad , \quad t \in R$$

Megjegyzés: A tér egy tetszőleges $A=(x_a, y_a, z_a)$ pontja pontosan akkor van rajta egy e egyenesen, ha az A pont koordinátái kielégítik az e egyenes paraméteres egyenletrendszerét valamely $t \in \boldsymbol{R}$ valós paraméterrel.

Az egyenes (folyt.)

Az egyenes paramétermentes egyenletrendszere

- Ha az irányvektor egyik koordinátája sem nulla:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$$

- Ha az irányvektor egyik koordinátája (pl. v_3) nulla:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2},\quad z=z_0$$

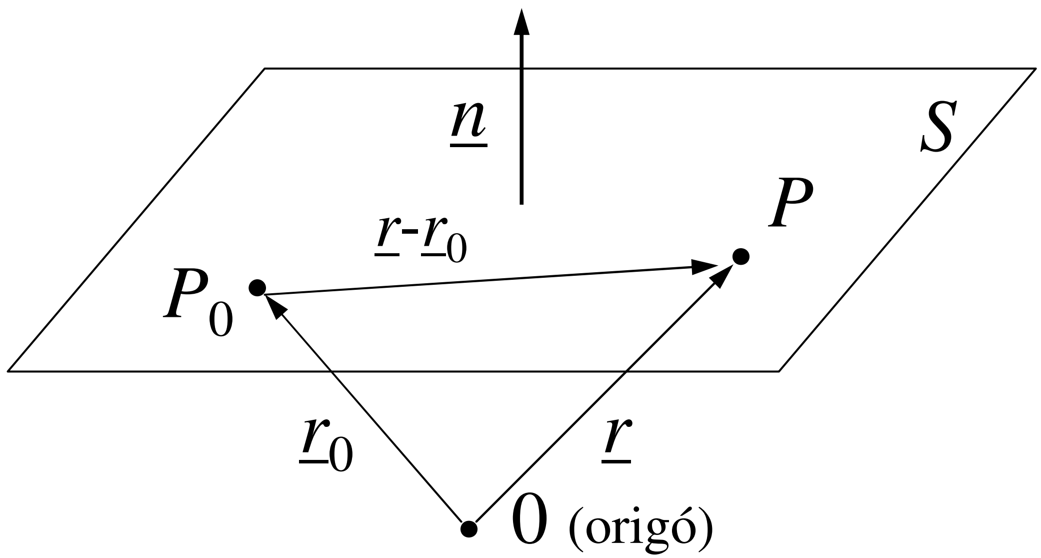
- Ha az irányvektor két koordinátája is nulla, akkor nem írható fel paramétermentes egyenletrend-szer.

A sík

Adott: $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, az S sík egy pontja,

$\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$, az S sík egy normálvektora (a síkra merőleges, nullvektortól különböző vektor).

Legyen $P=(x, y, z)$ az S sík egy tetszőlegesen választott pontja. Jelölje $\underline{r}_0$ a P_0 pontba, $\underline{r}$ a P pontba mutató helyvektort.



Ekkor $\underline{r}-\underline{r}_0 \perp \underline{n}$, így $\underline{n}\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0) = 0$ azaz:

$$n_1\cdot(x-x_0) + n_2\cdot(y-y_0) + n_3\cdot(z-z_0) = 0$$

A sík egyenlete

A sík egyenlete:

$$n_1 \cdot (x - x_0) + n_2 \cdot (y - y_0) + n_3 \cdot (z - z_0) = 0$$

azaz:

$$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = n_1 \cdot x_0 + n_2 \cdot y_0 + n_3 \cdot z_0 = \text{konst.}$$

vagy:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = D,$$

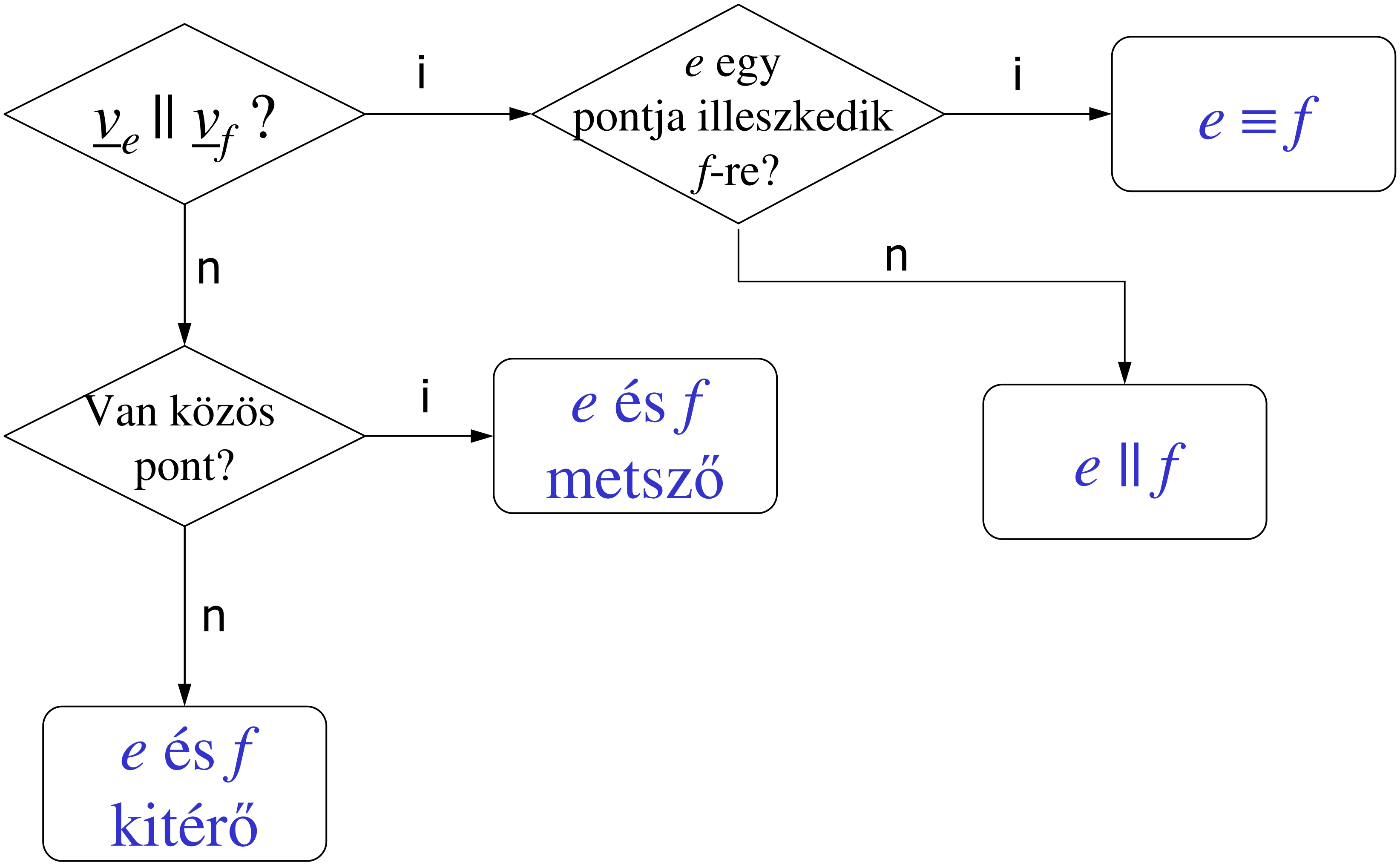
ahol $\underline{n} = (A, B, C)$ a sík egy normálvektora, $D \in \boldsymbol{R}$ konstans.

Térelemek kölcsönös helyzete:
Két egyenes kölcsönös helyzete

Két térbeli egyenes (e és f) kölcsönös helyzete:

- A két egyenes azonos. ($e \equiv f$)
  Minden pont közös.
- A két egyenes párhuzamos. ($e \parallel f$)
  Nincs közös pont.
- A két egyenes metsző.
  Egy közös pont van.
- A két egyenes kitérő.
  Nincs közös pont.

Két egyenes kölcsönös helyzetének vizsgálata



Egyenes és sík kölcsönös helyzete

Egyenes és sík (e és S) kölcsönös helyzete:

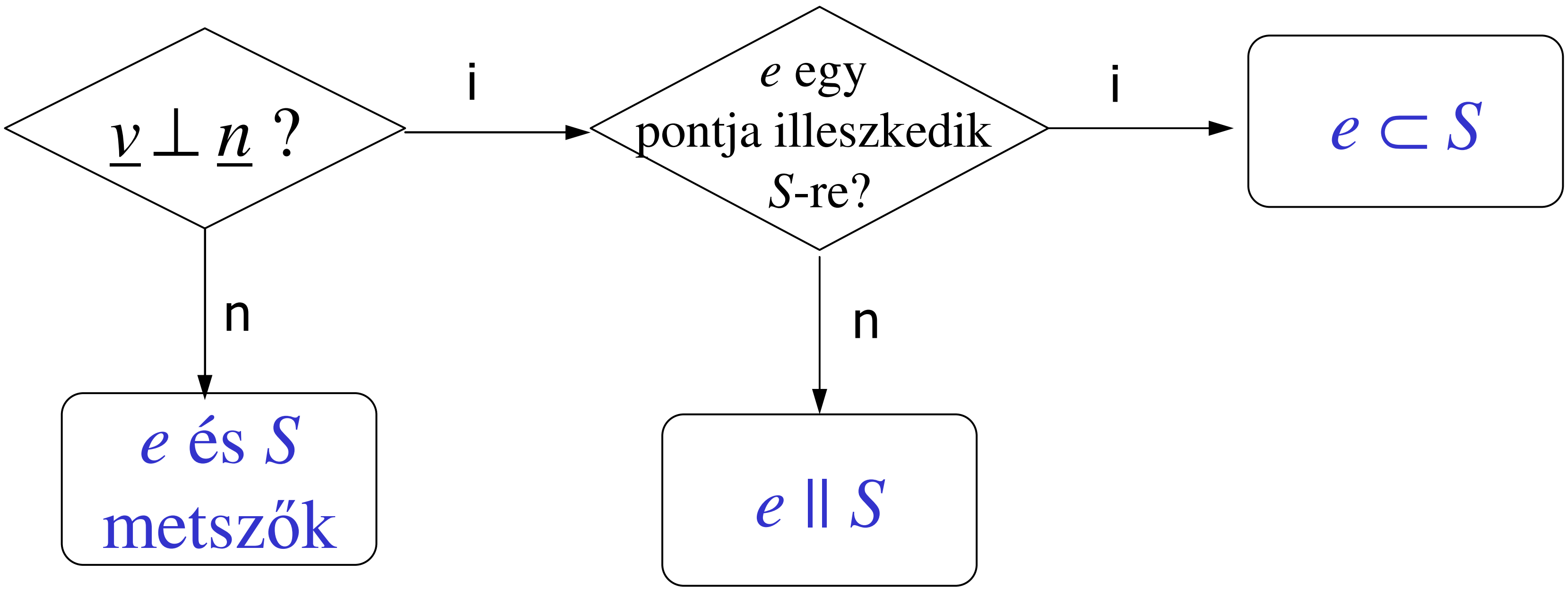
- Az egyenes a síkban helyezkedik el. ($e \subset S$)

  Az egyenes minden pontja közös pont.
- Az egyenes és a sík párhuzamos. ($e \parallel S$)

  Nincs közös pont.
- Az egyenes metszi a síkot.

  Egy közös pont van.

Egyenes és sík kölcsönös helyzetének vizsgálata



Két sík kölcsönös helyzete

Két sík (S_1 és S_2) kölcsönös helyzete:

- A két sík azonos. ($S_1 \equiv S_2$)

  Minden pont közös.

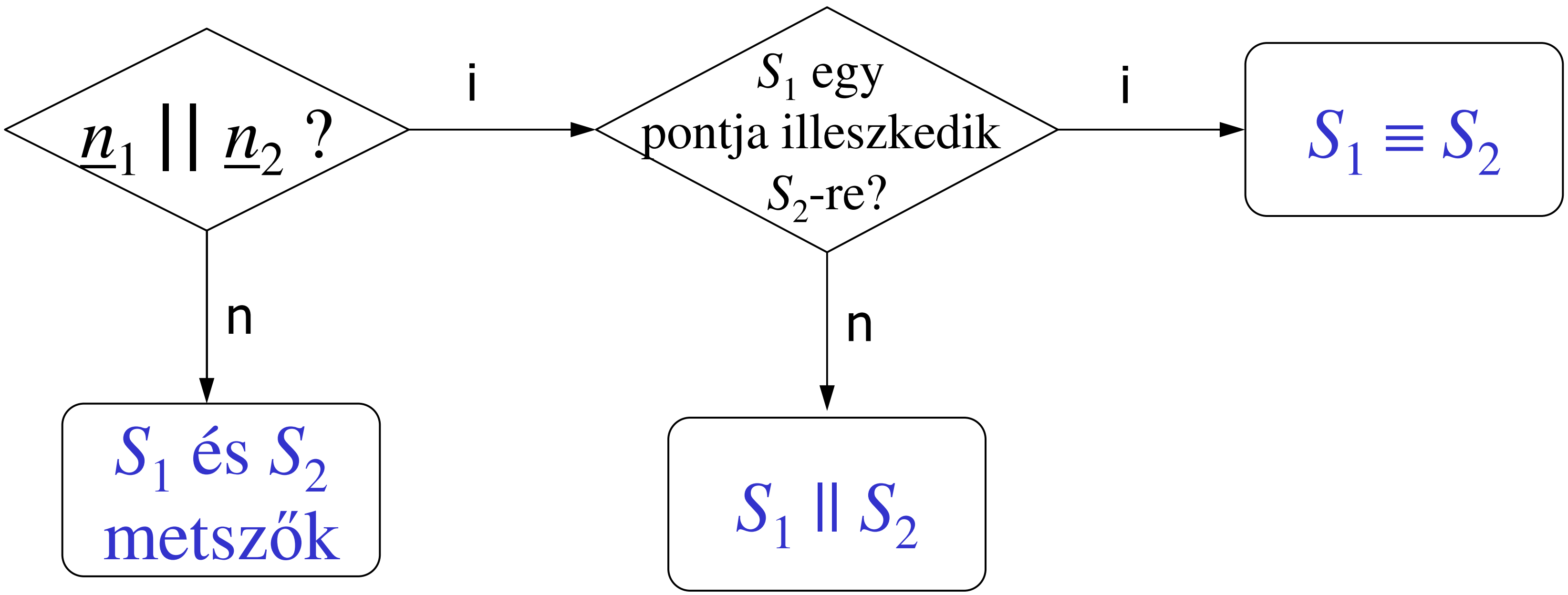
- A két sík párhuzamos. ($S_1 \parallel S_2$)

  Nincs közös pont.

- A két sík metsző.

  Végtelen sok közös pont van: a metszésvonal *egyenes*.

Két sík kölcsönös helyzetének vizsgálata I.



Két sík kölcsönös helyzetének vizsgálata II.

Két sík kölcsönös helyzetének vizsgálata a síkok egyenletei alapján:

Legyen a két sík (S_1 és S_2) egyenlete az alábbi:

S_1: $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = k_1$

S_2: $n_1' \cdot x + n_2' \cdot y + n_3' \cdot z = k_2$

1. Ha a két sík normálvektora nem párhuzamos, akkor S_1 és S_2 metsző.

2. Ha a két sík normálvektora párhuzamos, azaz $\frac{n_1}{n_1'} = \frac{n_2}{n_2'} = \frac{n_3}{n_3'} = \lambda$, akkor

- S_1 és S_2 azonos ($S_1 \equiv S_2$), ha $\frac{k_1}{k_2} = \lambda$,
- S_1 és S_2 párhuzamos ($S_1 \parallel S_2$), ha $\frac{k_1}{k_2} \neq \lambda$.

Térelemek metszéspontjának meghatározása

Megjegyzés: Két térelem metszéshalmaza nem más, mint egyenleteik rendszerének megoldáshalmaza.

Vizsgáljuk:

- Két egyenes metszéspontjának,
- Sík és egyenes metszéspontjának,
- Két sík metszésvonalának

meghatározását.

Két egyenes metszéspontja

Legyen adott két egyenes (e és f) paraméteres egyenletrendszere:

$$e: \quad \begin{aligned} x &= x_0 + t\cdot v_1 \\ y &= y_0 + t\cdot v_2 \\ z &= z_0 + t\cdot v_3 \end{aligned} \qquad\qquad f: \quad \begin{aligned} x &= x_0' + t\cdot v_1' \\ y &= y_0' + t\cdot v_2' \\ z &= z_0' + t\cdot v_3' \end{aligned}$$

1.Olyan t_1, t_2 paraméterértékeket keresünk, amelyek a két egyenletrendszerben ugyanazon x, y, z koordinátaértékeket szolgáltatják:

$$\left.\begin{aligned} x_0 + t_1\cdot v_1 &= x_0' + t_2\cdot v_1' \\ y_0 + t_1\cdot v_2 &= y_0' + t_2\cdot v_2' \\ z_0 + t_1\cdot v_3 &= z_0' + t_2\cdot v_3' \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad t_1 \, , \, t_2$$

2.A kapott paraméterértékeket az egyenletrendszerekbe visszahelyettesítve megkapjuk a metszéspont koordinátáit.

Sík és egyenes metszéspontja

Legyen adott az S sík egyenlete és az e egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$S: \quad n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = k$$

$$e: \quad x = x_0 + t \cdot v_1$$

$$y = y_0 + t \cdot v_2$$

$$z = z_0 + t \cdot v_3$$

1. A sík egyenletébe x, y és z helyére az egyenes paraméteres egyenletrendszeréből behelyettesítjük azok t paramétertől függő alakját és a kapott egyenletet megoldjuk t-re.
2. A kapott t paraméterértéket az egyenes egyenletrendsze-rébe visszahelyettesítve megkapjuk a metszéspont koordi-nátáit.

Két sík metszésvonala

Legyen adott két sík (S_1 és S_2) egyenlete:

S_1: $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = k_1$

S_2: $n_1' \cdot x + n_2' \cdot y + n_3' \cdot z = k_2$

1. Keresünk egy olyan $P_0 = (x, y, z)$ pontot, amelynek koordinátái mindkét sík egyenletét kielégítik.

   A három koordináta közül egy szabadon megválasztható!

2. A metszésvonal irányvektora: $\underline{v} = \underline{n}_1 \text{ x } \underline{n}_2$, ahol $\underline{n}_1$ az S_1 sík, $\underline{n}_2$ az S_2 sík normálvektora.

3. Felírjuk a P_0 ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes egyenletrendszerét.

Térelemek távolságának meghatározása

Vizsgáljuk:

- két pont,
- pont és egyenes,
- két párhuzamos egyenes,
- két kitérő egyenes,
- pont és sík,
- sík és vele párhuzamos egyenes,
- két párhuzamos sík

távolságának meghatározását.

1. Két pont távolsága

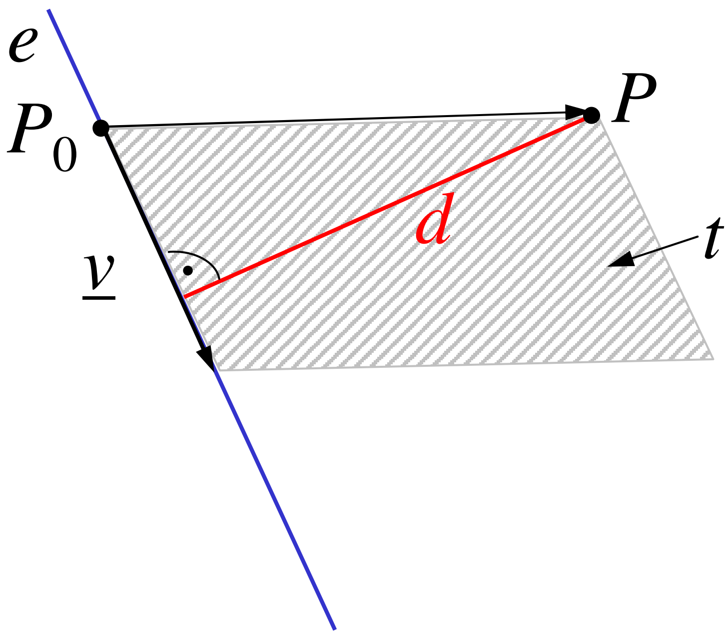
Legyen $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ és $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ két tetszőleges pont.

Távolságuk (a térbeli Pitagorasz-tétel alapján):

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

2. Pont és egyenes távolsága

Legyen az e egyenes egy pontja P_0 és egy irányvektora $\underline{v}$.
Legyen P egy az e egyenesre nem illeszkedő pont. Ekkor:



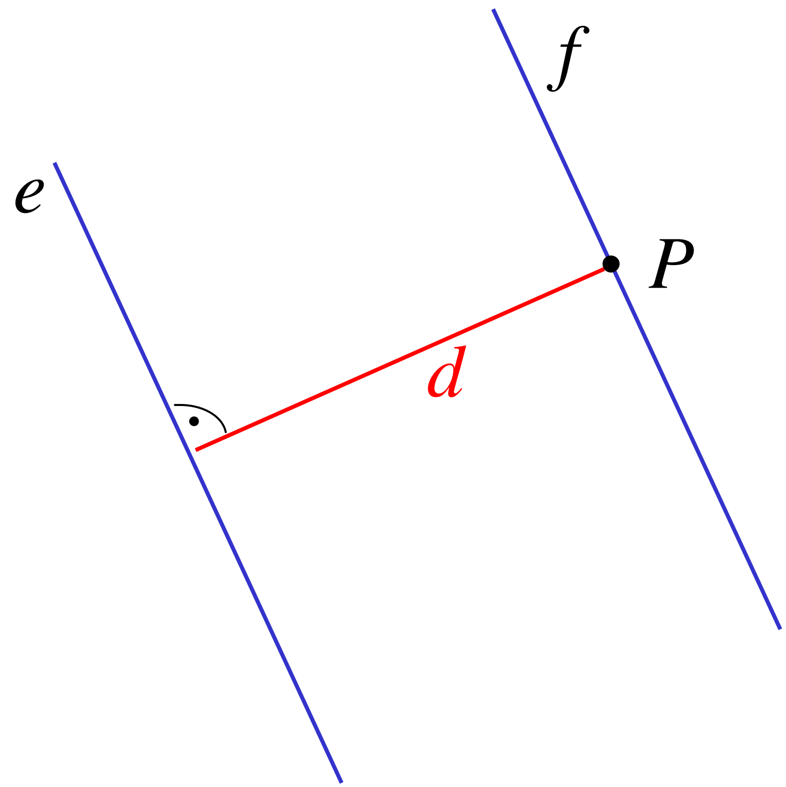
$$t = \left| \underline{v} \times \overrightarrow{P_0P} \right| = \left| \underline{v} \right| \cdot d$$

$$d = \frac{\left| \underline{v} \times \overrightarrow{P_0P} \right|}{\left| \underline{v} \right|}$$

3. Két párhuzamos egyenes távolsága

Legyen e és f két párhuzamos egyenes.

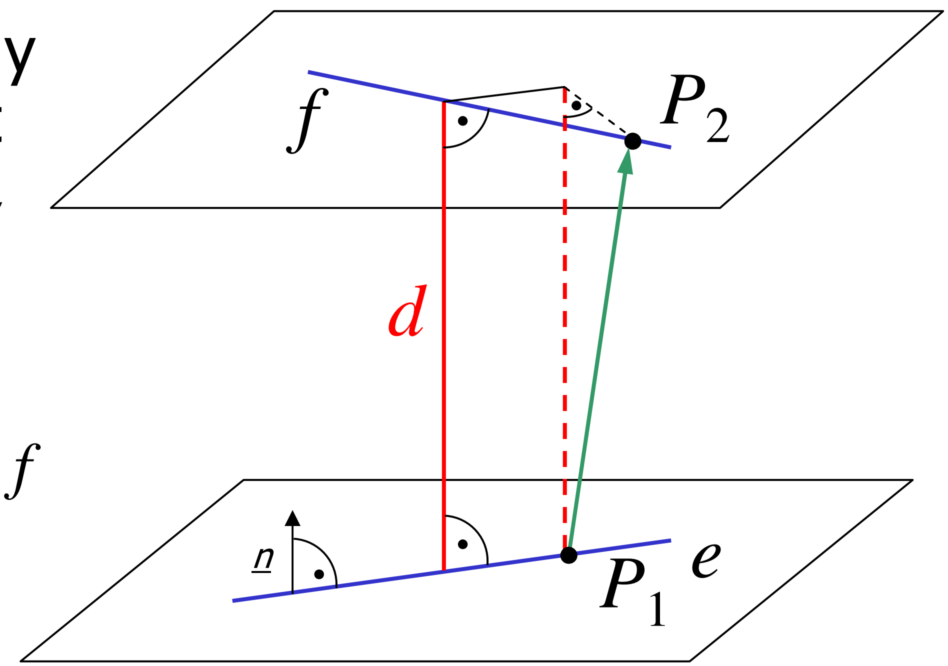
- Felveszünk egy tetszőleges P pontot az f egyenesen.
- Kiszámítjuk a P pont és az e egyenes távolságát 2. szerint.



4. Két kitérő egyenes távolsága

Legyen e és f két kitérő egyenes. Kitérő egyenesek esetén mindig létezik két olyan egymással párhuzamos sík, amely az egyik ill. a másik egyenest tartalmazza. Azt az egyenest, amely e-t és f-t egyaránt merőlegesen metszi, normál-tranzverzális egyenesnek nevezzük. Ezen egyenes e és f közé eső darabját normál-tranzverzálisnak hívjuk.

e és f távolsága: a normál-tranzverzális hossza.



4. Két kitérő egyenes távolsága (folyt.)

Legyen P_1 az e, P_2 az f egyenes tetszőleges pontja.

Legyen $\underline{n}$ a normáltranzverzális irányába mutató tetszőleges vektor.

A keresett d távolság egyenlő a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor $\underline{n}$ irányába eső merőleges vetületének hosszával.

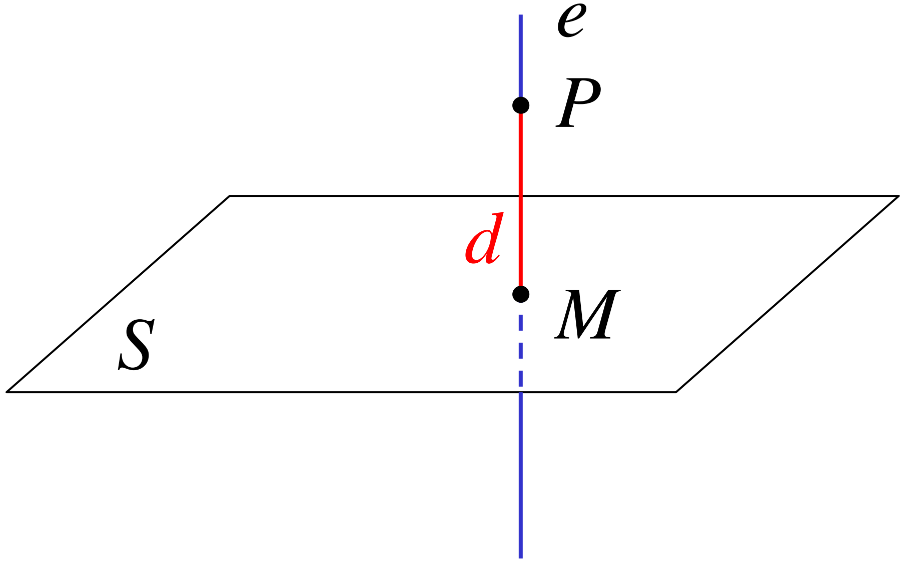
A számolás lépései:

- Felveszünk egy-egy tetszőleges P_1 és P_2 pontot az e ill. az f egyeneseken.
- $\underline{n}$ számolása: $\underline{n} = \underline{v}_e \times \underline{v}_f$ (vektoriális szorzat)
- $\underline{n}_e$ számolása: $\underline{n}_e = \frac{1}{|\underline{n}|} \cdot \underline{n}$ (skalárral való szorzás)
- d számolása: $d = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \underline{n}_e \right|$ (skaláris szorzás)

5. Pont és sík távolsága

Legyen P az S síkra nem illeszkedő pont. Távolságuk meghatározása:

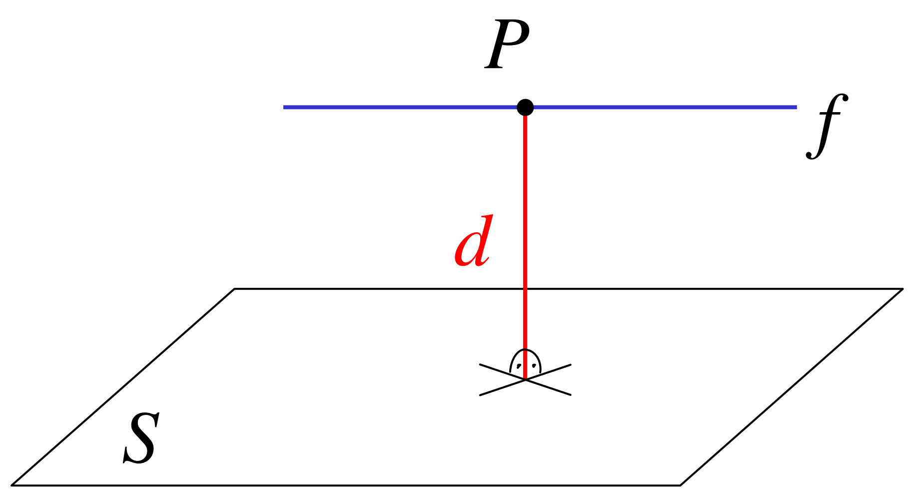
- Felírjuk annak az e egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely átmegy P-n és merőleges S-re.
- Meghatározzuk az e egyenes és az S sík metszéspontját $\Rightarrow M$
- A távolság: $d = |\overrightarrow{PM}|$



6. Sík és vele párhuzamos egyenes távolsága

Legyen az f egyenes párhuzamos az S síkkal. Távolságuk meghatározása:

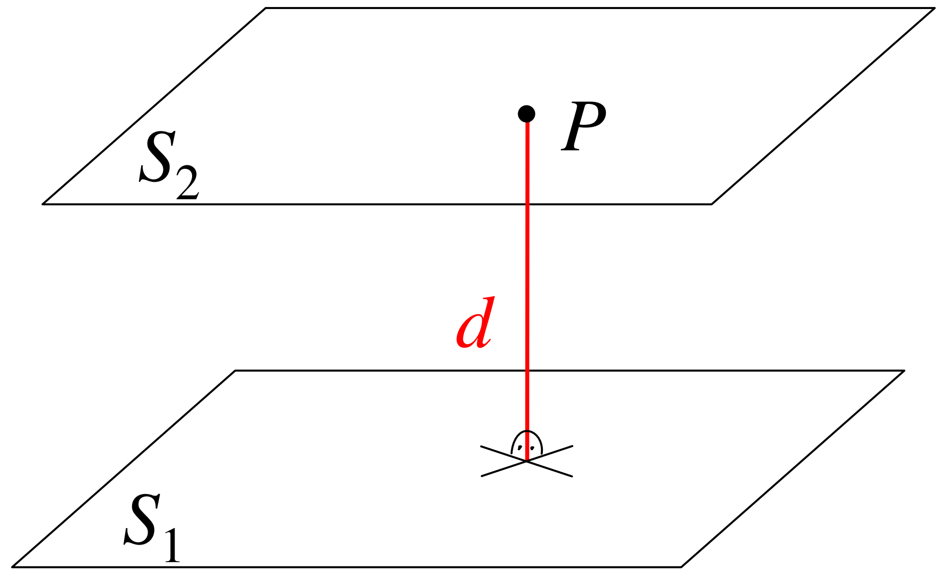
- Felveszünk egy tetszőleges P pontot az f egyenesen.
- Meghatározzuk a P pont és az S sík távolságát 5. szerint.



7. Két párhuzamos sík távolsága

Legyen az S_1 és S_2 sík párhuzamos. Távolságuk meghatározása:

- Felveszünk egy tetszőleges P pontot az S_2 síkon.
- Meghatározzuk a P pont és az S_1 sík távolságát 5. szerint.



Térelemek szögének meghatározása

Vizsgáljuk:

- két egyenes,
- egyenes és sík,
- két sík

szögének meghatározását.

Megjegyzés: térelemek szöge mindig 0° és 90° közé esik.

Két egyenes szöge

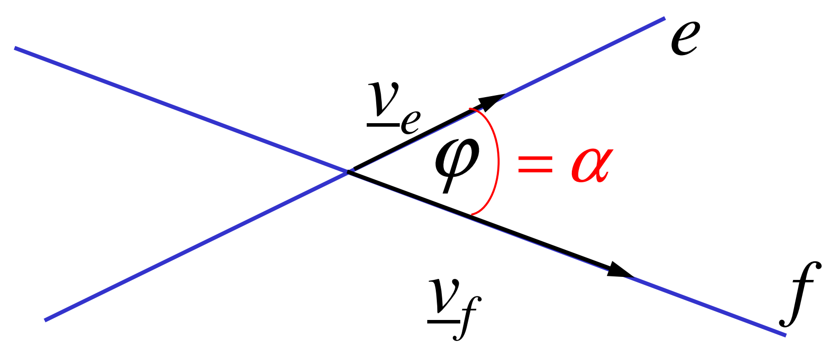
Legyen az e egyenes egy irányvektora $\underline{v}_e$, az f egyenes egy irányvektora $\underline{v}_f$. Az e és f szögének (α) meghatározása:

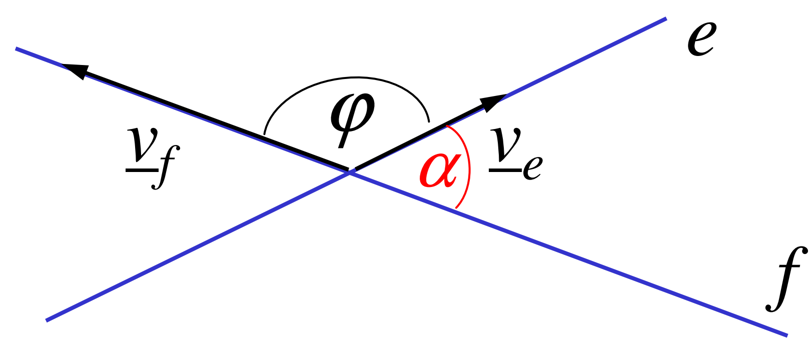
- Kiszámoljuk a két irány-vektor szögét (φ):

$$\cos\varphi = \frac{\underline{v}_e \cdot \underline{v}_f}{\left|\underline{v}_e\right| \cdot \left|\underline{v}_f\right|} \quad \Rightarrow \quad \varphi$$

- Ha $\varphi \leq 90°$ $\Rightarrow$ $\alpha = \varphi$

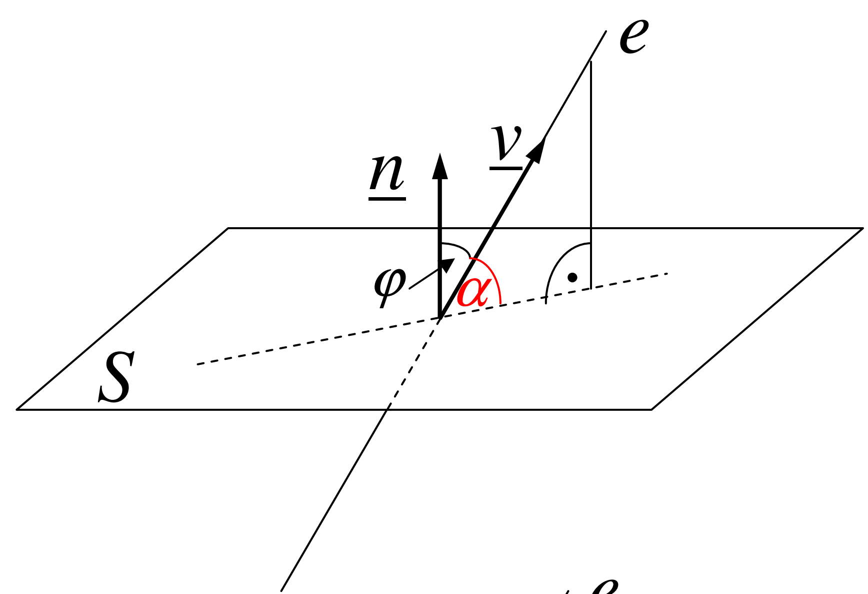
  Ha $\varphi > 90°$ $\Rightarrow$ $\alpha = 180° - \varphi$





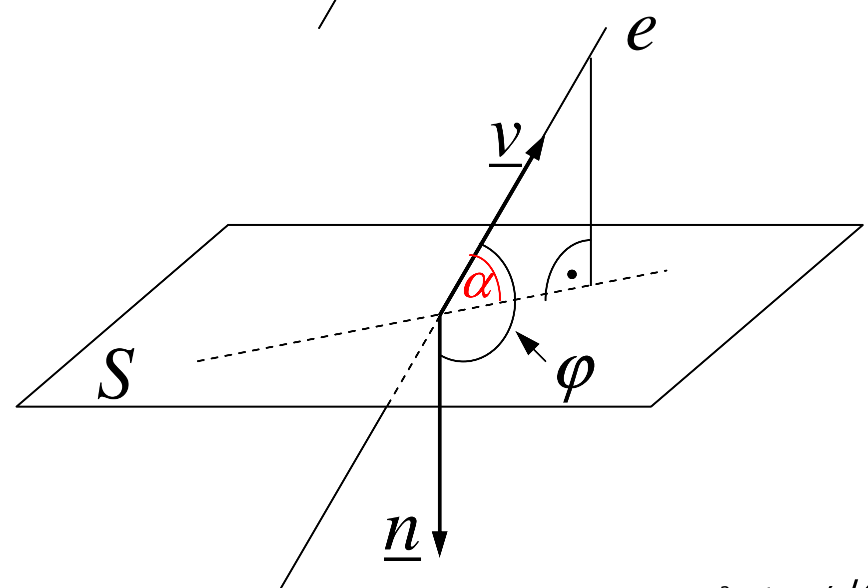
Egyenes és sík szöge

Legyen az e egyenes egy irányvektora $\underline{v}$, az S sík egy normálvektora $\underline{n}$. Az e és S szögének (α) meghatározása:



- Kiszámoljuk az irányvektor és a normálvektor szögét (φ):

$$\cos\varphi = \frac{\underline{v}\cdot\underline{n}}{|\underline{v}|\cdot|\underline{n}|} \Rightarrow \varphi$$



- Ha $\varphi \leq 90°$ $\Rightarrow$ $\alpha = 90° - \varphi$

  Ha $\varphi > 90°$ $\Rightarrow$ $\alpha = \varphi - 90°$

Két sík szöge

Legyen az S_1 sík egy normálvektora $\underline{n}_1$, az S_2 sík egy normálvektora $\underline{n}_2$. Az S_1 és S_2 síkok szögének (α) meghatározása:

- Kiszámoljuk a két normálvektor szögét (φ):

$$\cos\varphi = \frac{\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2}{|\underline{n}_1| \cdot |\underline{n}_2|} \quad \Rightarrow \quad \varphi$$

- Ha $\varphi \leq 90°$ $\Rightarrow$ $\alpha = \varphi$

  Ha $\varphi > 90°$ $\Rightarrow$ $\alpha = 180° - \varphi$