Többváltozós függvények differenciálszámítása

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Az $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvényt (totálisan) differenciálhatónak mondjuk az $a \in dom(f)$ pontban, ha létezik egy $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés úgy, hogy*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x - a\|} = 0.$$

*Az L lineáris leképezést az f függvény a pontbeli differenciáljának, az L leképezés M_L mátrixát pedig f $a-$beli **differenciálhányados**ának vagy **Jacobi-mátrix**ának nevezzük. Jelölés: $L = Df(a)$, illetve $M_L = f'(a)$.*

Valós f esetén $(q = 1)$ az $f'(a)$ Jacobi-mátrix $1 \times p$ típusú, azaz p dimenziós sorvektor. Ebben az esetben az a pontbeli Jacobi-mátrix helyett az a pontbeli gradiens vagy gradiensvektor elnevezés és az $f'(a) = \operatorname{grad} f(a)$ jelölés is használatos.

Definition 2 (Definíció) *Az $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ az e **irány mentén differenciálható** az $a \in dom(f)$ pontban, ha létezik az*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te) - f(a)}{t}$$

*határérték, ahol $e \in \mathbb{R}^p$ egységvektor. Ezt a határértéket (ha létezik) a $D_e f$ szimbólummal jelöljük, és az f függvény $a-$beli e **irány menti differenciálhányados**ának nevezzük.*

Abban a speciális esetben, amikor e megegyezik a kanonikus bázisvektorok valamelyikével, az irány menti differenciálhányadost **parciális differenciálhányados**nak nevezzük.

Feladatok

1. Milyen irányokra nézve differenciálható az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 y}{(x-1)^2 + y^2}, & (x,y) \neq (1,0) \\ 0, & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

függvény a $(0,-2)$ $-$nél?

2. Milyen irányokra nézve differenciálható az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 (y+2)}{x^2 + (y+2)^2}, & (x,y) \neq (0,-2) \\ 0, & (x,y) = (0,-2) \end{cases}$$

függvény a $(1,0)$ $-$nál?

3. Milyen irányokra nézve differenciálható az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & \textit{különben} \end{cases}$$

függvény a $(0,0)$ $-$nál?

4. Milyen irányokra nézve differenciálható az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & \textit{különben} \end{cases}$$

függvény a $(0, 0)$ –nál?

5. Milyen irányokra nézve differenciálható az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = |2x - 3y|$$

függvény a $(3, 2)$ –nél?

6. Milyen irányokra nézve differenciálható az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = |3x + 2y|$$

függvény a $(-2, 3)$ –nál?

7. Milyen irányokra nézve differenciálható az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = |2x - y|$$

függvény a $(1, 2)$ –nél?

8. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt[3]{x + 2y - 1}.$$

Differenciálható-e az f az $(1, 0)$ –nál az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és a $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ irányokra nézve?

9. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = |2x - y + 1|.$$

Differenciálható-e az f az $(0, 1)$ –nél az $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és a $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ irányokra nézve?

10. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}.$$

Vizsgálja meg az f függvényt differenciálhatóság szempontjából. Határozza meg az alábbiakat!

   (a) $Df(2, 3)$,
   (b) $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)} f(2, 3)$,
   (c) a $(2, 3)$ –beli legnagyobb iránymenti derivált, ha létezik,
   (d) a $(2, 3)$ –beli érintősík egyenlete.

11. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(x - y^2\right).$$

Vizsgálja meg az f függvényt differenciálhatóság szempontjából. Határozza meg az alábbiakat!

   (a) $Df(2, 1)$,
   (b) $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)} f(2, 1)$,

(c) a $(2,1)$ −beli legnagyobb iránymenti derivált, ha létezik,

(d) a $(2,1)$ −beli érintősík egyenlete.

12. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin(2x)}{y}.$$

Vizsgálja meg az f függvényt differenciálhatóság szempontjából. Határozza meg az alábbiakat!

(a) $Df\left(\frac{\pi}{12}, -1\right)$,

(b) $D_{\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)} f\left(\frac{\pi}{12}, -1\right)$,

(c) a $\left(\frac{\pi}{12}, -1\right)$ −beli legnagyobb iránymenti derivált, ha létezik,

(d) a $\left(\frac{\pi}{12}, -1\right)$ −beli érintősík egyenlete,

(e) $T^2_{\left(\frac{\pi}{12}, -1\right)}(f)$.

13. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\cos(3y)}{x}.$$

Vizsgálja meg az f függvényt differenciálhatóság szempontjából. Határozza meg az alábbiakat!

(a) $Df\left(1, \frac{\pi}{9}\right)$,

(b) $D_{\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)} f\left(1, \frac{\pi}{9}\right)$,

(c) a $\left(1, \frac{\pi}{9}\right)$ −beli legnagyobb iránymenti derivált, ha létezik,

(d) a $\left(1, \frac{\pi}{9}\right)$ −beli érintősík egyenlete,

(e) $T^2_{\left(1, \frac{\pi}{9}\right)}(f)$.

14. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \ln\left(x + y^2\right).$$

Vizsgálja meg az f függvényt differenciálhatóság szempontjából. Határozza meg az alábbiakat!

(a) $Df(-3,2)$,

(b) $D_{\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)} f(-3,2)$,

(c) a $(-3,2)$ −beli legnagyobb iránymenti derivált, ha létezik,

(d) a $(-3,2)$ −beli érintősík egyenlete.

15. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x}{x-2y}.$$

Vizsgálja meg az f függvényt differenciálhatóság szempontjából. Határozza meg az alábbiakat!

(a) $Df(3,1)$,

(b) $D_{\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)} f(3,1)$,

(c) a $(-3,2)$ −beli legnagyobb iránymenti derivált, ha létezik.

16. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Határozza meg az alábbiakat!

(a) $Df(1,2)$,

(b) $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)} f(1,2)$,

(c) a $(1,2)$ −beli legnagyobb iránymenti derivált, ha létezik,

(d) a $(1,2)$ −beli érintősík egyenlete.

17. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + x^3.$$

Határozza meg az alábbiakat!

(a) $Df(1,-1)$,

(b) $D_{\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)} f(1,-1)$,

(c) a $(1,-1)$ −beli legnagyobb iránymenti derivált, ha létezik,

(d) a $(1,-1)$ −beli érintősík egyenlete,

(e) $T^2_{(1,-1)}(f)$.

18. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = g\left(\frac{e^{xy}}{\cos(2x+y)}, x^2 \arcsin\left(\frac{x}{y}\right), \sqrt{\ln(\operatorname{tg}(y-x^3))}\right).$$

Ahol $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható. Határozza meg a $D_1 f$−et!

19. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = g\left(x^2 \sin(xy), \frac{e^{2x-y}}{y \ln(x)}\right).$$

Ahol $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható. Határozza meg a $D_1 f$−et!

20. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = g\left(\frac{\sqrt{x+y^2}}{y}, e^y \operatorname{tg}(xy)\right).$$

Ahol $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható. Határozza meg a $D_2 f$−et!