Többváltozós függvények differenciálszámítása

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Az $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$függvényt (totálisan) differenciálhatónak mondjuk az $a \in dom\,(f)$ pontban, ha létezik egy $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés úgy, hogy*

$$\lim_{x \to a} \frac{f\,(x) - f\,(a) - L\,(x - a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Az L lineáris leképezést az f függvény a pontbeli differenciáljának, az L leképezés M_L mátrixát pedig f $a-$beli ***differenciálhányados****ának vagy* ***Jacobi-mátrix****ának nevezzük. Jelölés: $L = Df(a)$, illetve $M_L = f'(a)$.*

Valós f esetén $(q = 1)$ az $f'\,(a)$ Jacobi-mátrix $1 \times p$ típusú, azaz p dimenziós sorvektor. Ebben az esetben az a pontbeli Jacobi-mátrix helyett az a pontbeli gradiens vagy gradiensvektor elnevezés és az $f'\,(a) = \operatorname{grad} f\,(a)$ jelölés is használatos.

Definition 2 (Definíció) *Az $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ az e* ***irány mentén differenciálható*** *az $a \in dom\,(f)$ pontban, ha létezik az*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f\,(a + te) - f\,(a)}{t}$$

határérték, ahol $e \in \mathbb{R}^p$ egységvektor. Ezt a határértéket (ha létezik) a $D_e f$ szimbólummal jelöljük, és az f függvény $a-$beli e ***irány menti differenciálhányados****ának nevezzük.*

Abban a speciális esetben, amikor e megegyezik a kanonikus bázisvektorok valamelyikével, az irány menti differenciálhányadost **parciális differenciálhányados**nak nevezzük.

Feladatok

1. Legyen
$$f\,(x, y) = \cos\left(x + y^2\right) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
   (a) Differenciálható-e f az $a = (\pi, 0)$ pontban? Ha igen, adja meg az $f'\,(a)$ gradiens vektort!
   (b) Adja meg az f függvény $a = (\pi, 0)$ pontbeli iránymenti deriváltját a $v = (-1, 0)$ irány mentén!

2. Legyen
$$f\,(x, y) = \sin\left(x^2 + y^2\right) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
   (a) Differenciálható-e f az $a = (\sqrt{\pi}, 0)$ pontban? Ha igen, adja meg az $f'\,(a)$ gradiens vektort!
   (b) Adja meg az f függvény $a = (\sqrt{\pi}, 0)$ pontbeli iránymenti deriváltját a $v = (-1, 0)$ irány mentén!

3. Legyen
$$f\,(x, y) = \cos\left(x + y^3\right) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
   (a) Differenciálható-e f az $a = (\pi, 0)$ pontban? Ha igen, adja meg az $f'\,(a)$ gradiens vektort!
   (b) Adja meg az f függvény $a = (\pi, 0)$ pontbeli iránymenti deriváltját a $v = (0, -1)$ irány mentén!

4. Legyen
$$f(x,y)=\cos(x-2y) \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$
   (a) Differenciálható-e f az $a=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ pontban? Ha igen, adja meg az $f'(a)$ gradiens vektort!
   (b) Adja meg az f függvény $a=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ pontbeli iránymenti deriváltját a $v=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ irány mentén!

5. Legyen
$$f(x,y)=\sin(2x-y) \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$
   (a) Differenciálható-e f az $a=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ pontban? Ha igen, adja meg az $f'(a)$ gradiens vektort!
   (b) Adja meg az f függvény $a=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ pontbeli iránymenti deriváltját a $v=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ irány mentén!

6. Legyen
$$f(x,y)=\ln\left(x^2+y^3\right) \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad (x,y)\neq(0,0).$$
   (a) Differenciálható-e f az $a=(2,1)$ pontban? Ha igen, adja meg az $f'(a)$ gradiens vektort!
   (b) Adja meg az f függvény $a=(2,1)$ pontbeli iránymenti deriváltját a $v=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ irány mentén!

7. Legyen
$$f(x,y)=e^{-x^2+y^3} \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$
   (a) Differenciálható-e f az $a=(1,2)$ pontban? Ha igen, adja meg az $f'(a)$ gradiens vektort!
   (b) Adja meg az f függvény $a=(1,2)$ pontbeli iránymenti deriváltját a $v=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ irány mentén!

8. Legyen
$$f(x,y)=\frac{x^2}{y^3} \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad y\neq 0.$$
   (a) Differenciálható-e f az $a=(2,-1)$ pontban? Ha igen, adja meg az $f'(a)$ gradiens vektort!
   (b) Adja meg az f függvény $a=(2,-1)$ pontbeli iránymenti deriváltját a $v=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ irány mentén!

9. Írja fel a $z=f(x,y)$ felület azon érintősíkjának az egyenletét, amely a felületet az adott a pontban érinti!
   (a)
$$f(x,y)=\sin\left(x^2+y^2\right) \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2; \qquad a=\left(\sqrt{\pi},0,0\right),$$
   (b)
$$f(x,y)=\cos\left(x+y^2\right) \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2; \qquad a=(\pi,0,-1),$$
   (c)
$$f(x,y)=\cos\left(x+y^3\right) \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2; \qquad a=(\pi,0,-1),$$

(d)

$$f(x,y) = \cos(x-2y) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2; \qquad a = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 1\right),$$

(e)

$$f(x,y) = \sin(2x-y) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2; \qquad a = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 0\right).$$