Hatványsorok, Taylor-polinom

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Legyen adva egy $x_0 \in \mathbb{R}$ szám és egy $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ valós sorozat. A*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ...$$

függvénysort x_0 körüli hatványsornak nevezzük. Az x_0 szám a hatványsor középpontja, x pedig a valós változó.

Definition 2 (Definíció) *A hatványsor konvergenciatartományán a*

$$K = \left\{ c \in \mathbb{R} \mid \ a \sum_{k=0}^{\infty} a_k(c-x_0)^k \text{ számsor konvergens} \right\}$$

halmazt értjük.

Theorem 3 (Tétel) ***Abel-féle lemma*** *Ha valamely $c \neq x_0$ szám esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(c-x_0)^k$ számsor konvergens, akkor minden olyan $d-$re, amelyre $|d-x_0| < |c-x_0|$ a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(d-x_0)^k$ számsor abszolút konvergens.*

Az Abel-féle lemmából következik az alábbi tétel.

Theorem 4 (Tétel) *Legyen K a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya, és*

$$r = \sup\{|c-x_0| \mid c \in K\} \in [0,\infty].$$

Ha $r=0$, akkor $K=\{x_0\}$. Ha $r=+\infty$, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(c-x_0)^k$ hatványsor abszolút konvergens, és így $K=\mathbb{R}$. Ha pedig $r \in (0,\infty)$, akkor minden olyan $c-$re , amelyre $|c-x_0| < r$ ($|c-x_0| > r$) a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(c-x_0)^k$ hatványsor abszolút konvergens (divergens), s ezért $(x_0-r, x_0+r) \subset K \subset [x_0-r, x_0+r]$.

Mivel a hatványsor konvergenciatartománya az $r=0$ esettől eltekintve intervallum, a konvergenciatartomány helyett a konvergenciaintervallum elnevezés is használatos.

Definition 5 (Definíció) *Az előző tételben szereplő r számot a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hatványsor konvergenciasugarának nevezzük.*

A konvergenciasugár meghatározása szolgál a következő tétel.

Theorem 6 (Tétel) ***Cauchy–Hadamard tétel*** *Legyen r a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

hatványsor konvergenciasugara, és

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Ekkor

$$r = \begin{cases} 0, & ha\ \rho = +\infty \\ \dfrac{1}{\rho}, & ha\ \rho \in (0, \infty) \\ +\infty, & ha\ \rho = 0 \end{cases}.$$

A hatványsor konvergenciatartományának meghatározására gyakran jól használható a következő tétel.

Theorem 7 (Tétel) *Legyen r a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

hatványsor konvergenciasugara. Tegyük fel, hogy $a_k \neq 0$ véges számú kivétellel, és valamely $\lambda \in [0, \infty]$ számra

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}.$$

Ekkor

$$r = \begin{cases} 0, & ha\ \lambda = +\infty \\ \dfrac{1}{\lambda}, & ha\ \lambda \in (0, \infty) \\ +\infty, & ha\ \lambda = 0 \end{cases}.$$

Az összegfüggvény tulajdonságai

Definition 8 (Definíció) *Legyen K a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya. Az*

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in K,$$

képlettel definiált $s : K \to \mathbb{R}$ függvényt a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor összegfüggvényének mondjuk.

Az összegfüggvényt fontosabb tulajdonságait írják le a következő tételek.

Theorem 9 (Tétel) *Ha egy hatványsor konvergenciasugara pozitív, akkor a hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciaintervallumán.*

Theorem 10 (Tétel) ***Tagonkénti differenciálás*** *Ha a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

hatványsor r konvergenciasugara pozitív, akkor a hatványsor s összegfüggvénye akárhányszor differenciálható a konvergenciaintervallum belsejében, és $n-$edik deriváltja a hatványsor $n-$szeri *tagonkénti differenciálásával kapható meg, azaz*

$$\begin{aligned}
s'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x-x_0)^{k-1}, \\
s''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)(x-x_0)^{k-2}, \\
&\vdots \\
s^{(n)}(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)\ldots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n},
\end{aligned}$$

valahányszor $|x-x_0|<r$.

Theorem 11 (Tétel) ***Tagonkénti integrálás*** *Ha a* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *hatványsor konvergenciasugara pozitív és* $[a,b]$ *része a hatványsor konvergenciaintervallumának, akkor a hatványsor s összegfüggvénye tagonként integrálható* $[a,b]-n$*, azaz*

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k(x-x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}\right]_a^b$$

Taylor-sor, Taylor-polinom

Definition 12 (Definíció) *Tegyük fel, hogy az f függvény akárhányszor differenciálható az* $x_0 \in dom(f)$ *helyen. A*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

hatványsort az f függvény x_0 *körüli* ***Taylor-sor****ának nevezzük. A hatványsor* $n-$*edik*

$$T_{x_0}^{n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

részletösszegét az f ***függvény*** $n-$***edik*** x_0 ***körüli Taylor-polinomjá****nak mondjuk. Az* $x_0=0$ *esetben használatos a MacLaurin-sor illetve MacLaurin-polinom elnevezés is. Az*

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

különbséget az f függvény $n-$*edik* x_0 *körüli* ***maradéktag****jának mondjuk.*

Legyen $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n)$ folytonos az $[x_0,x]$, $([x,x_0])$ intervallumon és differenciálható az (x_0,x), $((x,x_0))$ intervallumon, akkor létezik $\xi \in (x_0,x)$, $((x,x_0))$ úgy, hogy

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Megjegyezzük, hogy az $n=0$ esetben Taylor tétele Lagrange tételébe megy át.

Definition 13 (Definíció) *A* $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *tagot a maradéktag Lagrange-féle alakjának nevezzük.*

Taylor tétele gyakran jól használható függvényértékek közelítő számítására.

Feladatok

1. A hányadoskritérium felhasználásával adja meg a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1} (x-1)^n$$
hatványsor konvergenciasugarát! Vizsgálja meg a konvergenciát a konvergencia intervallum végpontjaiban is!

2. A hányadoskritérium felhasználásával adja meg a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, 5^n} (x+1)^n$$
hatványsor konvergenciasugarát! Vizsgálja meg a konvergenciát a konvergencia intervallum végpontjaiban is!

3. Adja meg a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt{n}}$$
hatványsor konvergenciasugarát! Vizsgálja meg a konvergenciát a konvergencia intervallum végpontjaiban is!

4. Adja meg a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n}$$
hatványsor konvergenciasugarát! Vizsgálja meg a konvergenciát a konvergencia intervallum végpontjaiban is!

5. Számolja ki az alábbi függvényértékek közelítőértékét az adott Taylor-polinommal, és becsülje meg a hibát!

a. $\ln\left(e+\frac{1}{10}\right)$, $T_e^3(\ln)$, **b.** $\frac{1}{\sqrt{1,1}}$, $T_1^3(h)$, ahol $h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-1/2}$,

c. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{10}\right)$, $T_{\pi/2}^3(\sin)$, **d.** $\sqrt{2,1}$, $T_2^2(h)$, ahol $h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x}$,

e. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{10}\right)$, $T_{\pi/2}^3(\cos)$, **f.** $\ln(e+0,2)$, $T_e^2(\ln)$,

g. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+0,2\right)$, $T_{\pi/4}^2(\sin)$, **h.** $\ln(2,1)$, $T_2^2(\ln)$,

i. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{10}\right)$, $T_{\pi/3}^2(\sin)$, **j.** $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{10}\right)$, $T_{\pi/6}^2(\cos)$,