Taylor-polinom, Taylor-sor

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Tegyük fel, hogy az f függvény akárhányszor differenciálható az $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$ helyen. A*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

*hatványsort az f függvény x_0 körüli **Taylor-sor**ának nevezzük. A hatványsor*

$$T_{x_0}^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

*$n-$edik részletösszegét az f **függvény** x_0 **körüli** $n-$**edik Taylor-polinomjá**nak mondjuk. Az $x_0 = 0$ esetben használatos a **MacLaurin-sor** illetve **MacLaurin-polinom** elnevezés is. Az*

$$R_{x_0}^n(f)(x) = f(x) - T_{x_0}^n(f)(x)$$

*különbséget az f **függvény** x_0 **körüli maradéktag**jának mondjuk.*

Theorem 2 (Taylor-tétel) *Legyen $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n)$ folytonos az $[x_0, x]$ ($[x, x_0]$) intervallumon és differenciálható az (x_0, x) ((x, x_0)) intervallumon, akkor létezik $\xi \in (x_0, x)$ ((x, x_0)) úgy, hogy*

$$R_{x_0}^n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Definition 3 (Definíció) *A $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ tagot a **maradéktag Lagrange-féle alakjá**nak nevezzük.*

Feladatok

1. Legyen
$$f(x) = e^{5x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Írja fel
   (a) az f függvény $x_0 = 0$ körüli második $(n = 2)$ Taylor-polinomját és a második hibatag Lagrange-féle alakját!
   (b) az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát!

2. Legyen
$$f(x) = e^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Írja fel
   (a) az f függvény $x_0 = 0$ körüli második $(n = 2)$ Taylor-polinomját és a második hibatag Lagrange-féle alakját!
   (b) az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát!

3. Legyen
$$f(x) = e^{3x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Írja fel
   (a) az f függvény $x_0 = 0$ körüli második $(n = 2)$ Taylor-polinomját és a második hibatag Lagrange-féle alakját!
   (b) az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát!

4. Legyen
$$f(x) = e^{2x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Írja fel
   (a) az f függvény $x_0 = 0$ körüli második $(n = 2)$ Taylor-polinomját és a második hibatag Lagrange-féle alakját!
   (b) az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát!

5. (a) Írja fel az $f(x) = \cos(x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli második $(n = 2)$ Taylor-polinomját!
   (b) Az előző Taylor-polinom segítségével adja meg a $\cos(0,01)$ közelítő értékét, és becsülje meg a hibát!

6. (a) Írja fel az $f(x) = \sin(x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli második $(n = 2)$ Taylor-polinomját!
   (b) Az előző Taylor-polinom segítségével adja meg a $\sin(0,01)$ közelítő értékét, és becsülje meg a hibát!

7. (a) Írja fel az $f(x) = \cos(x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli második $(n = 2)$ Taylor-polinomját!
   (b) Az előző Taylor-polinom segítségével adja meg a $\cos(0,05)$ közelítő értékét, és becsülje meg a hibát!

8. (a) Írja fel az $f(x) = \cos(x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadik $(n = 3)$ Taylor-polinomját!
   (b) Az előző Taylor-polinom segítségével adja meg a $\cos(0,05)$ közelítő értékét, és becsülje meg a hibát!

9. (a) Írja fel az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $x_0 = 1$ körüli harmadik $(n = 3)$ Taylor-polinomját!

   (b) Az előző Taylor-polinom segítségével adja meg a $\sqrt{1,1}$ közelítő értékét, és becsülje meg a hibát!

10. (a) Írja fel az $f(x) = \ln(x)$ függvény $x_0 = 2$ körüli második $(n = 2)$ Taylor-polinomját!

    (b) Az előző Taylor-polinom segítségével adja meg a $\ln(2,1)$ közelítő értékét, és becsülje meg a hibát!

11. (a) Írja fel az $f(x) = \cos(x)$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{2}$ körüli harmadik $(n = 3)$ Taylor-polinomját!

    (b) Az előző Taylor-polinom segítségével adja meg a $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{10}\right)$ közelítő értékét, és becsülje meg a hibát!

12. (a) Írja fel az $f(x) = \sin(x)$ függvény $x_0 = \frac{\pi}{2}$ körüli harmadik $(n = 3)$ Taylor-polinomját!

    (b) Az előző Taylor-polinom segítségével adja meg a $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{10}\right)$ közelítő értékét, és becsülje meg a hibát!