

## Elemi függvények

### *függvény fogalma, jelölések*

értelmezési tartomány  
értékkészlet  
képhalmaz  
függvény megadása  
függvények egyenlősége  
műveletek függvényekkel  
összetett függvény  
inverz függvény  
függvény grafikonja

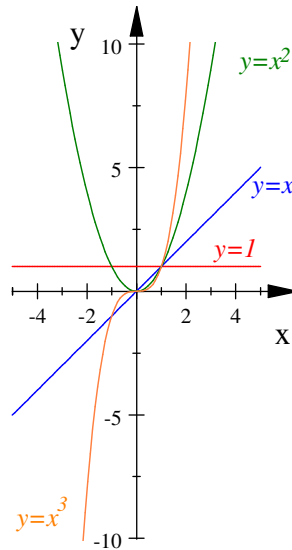
### *függvények nevezetes tulajdonságai*

korlátos  
monoton  
paritás (páros, páratlan)  
periodikus  
függvény zérushelye  
minimum  
maximum  
**konvex**  
**konkáv**  
**inflexiós pont**  
**függvény határértéke**  
**folytonos**  
**differenciálható**  
**integrálható**

## elemi függvények

### 1. Racionális egészfüggvények (polinomfüggvények)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n; \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall a_i \in \mathbb{R}$$

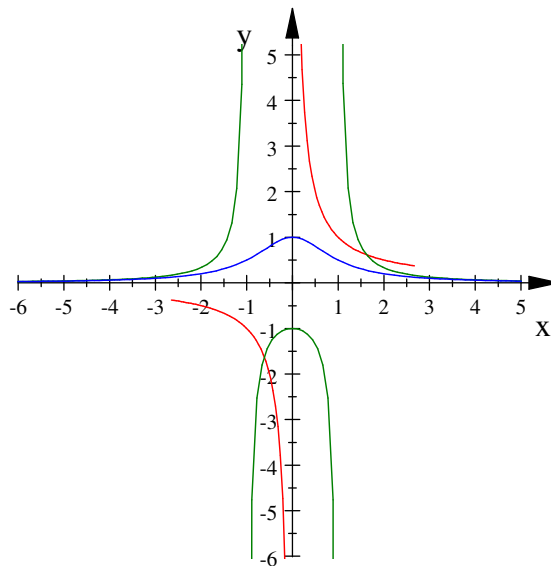


*Példák racionális egészfüggvényekre*

### 2. Racionális törtfüggvények

$$f: \mathbb{R} \setminus H \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}; \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad \forall a_i, b_i \in \mathbb{R},$$

$$\text{ahol } H = \{x \mid x \in \mathbb{R}, b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m = 0\}$$

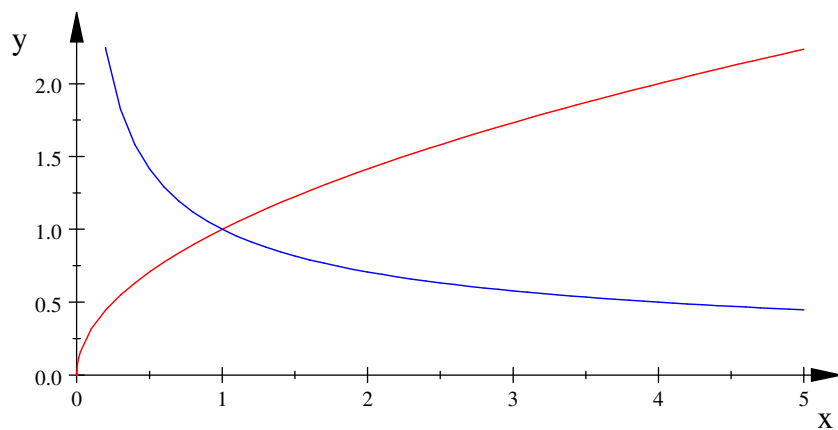


*Példák racionális törtfüggvényekre*

$$y = \frac{1}{x}; \quad y = \frac{1}{x^2 - 1}; \quad y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

### 3. Hatványfüggvények

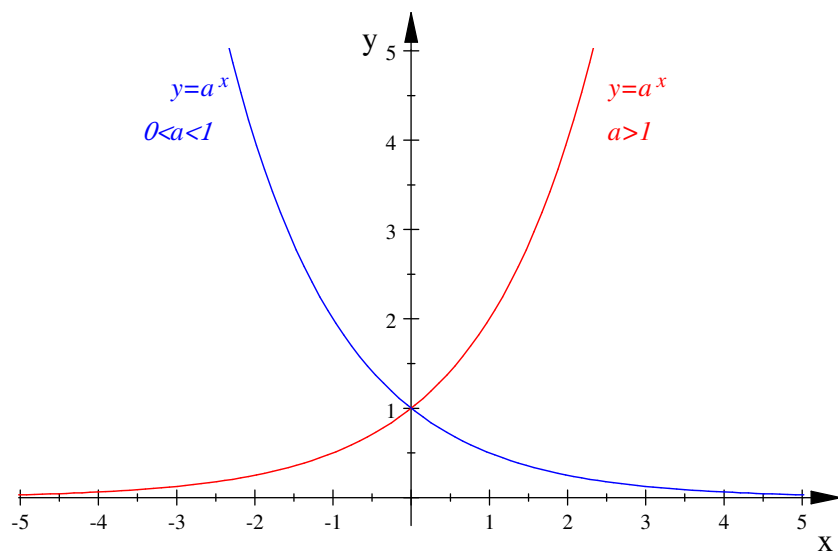
$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^\alpha; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$



$$y = \sqrt{x} \text{ és } y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

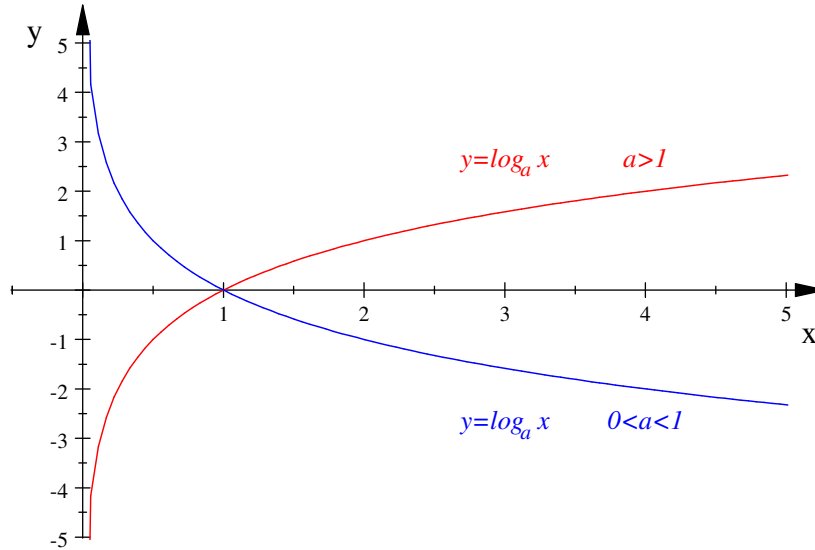
### 4. Exponenciális függvények

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = a^x; \quad a > 0, a \neq 1$$

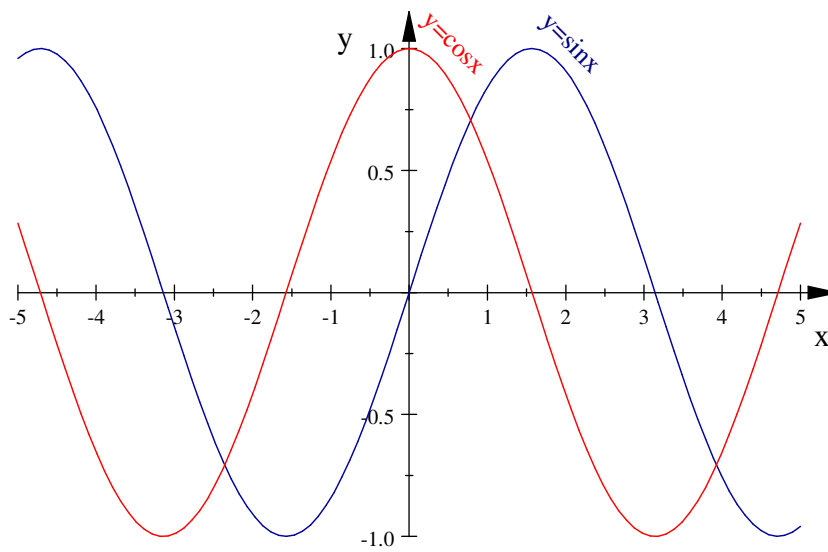


## 5. Logaritmusfüggvények

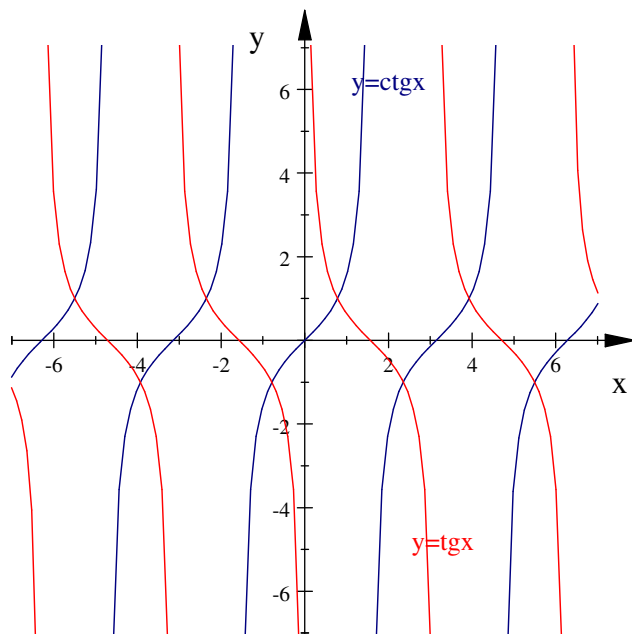
$$f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \log_a x; a > 0, a \neq 1$$



## 6. Trigonometrikus függvények



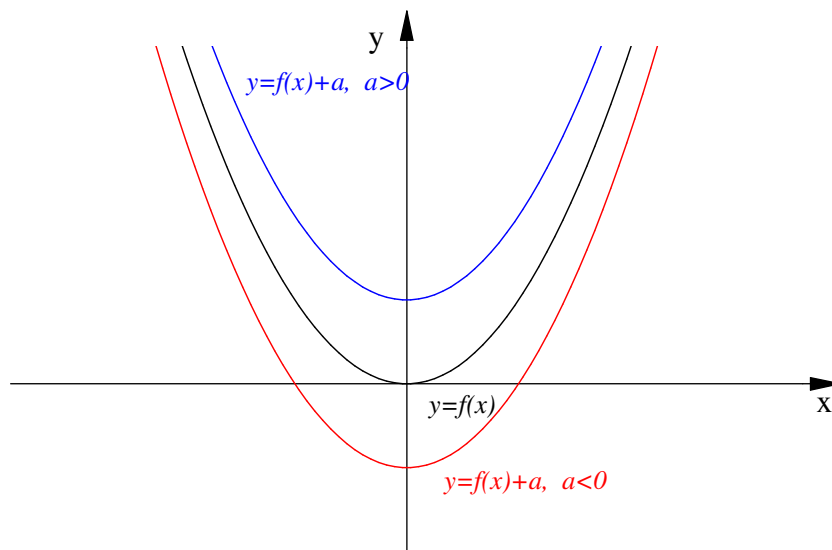
$$y = \sin x \text{ és } y = \cos x$$



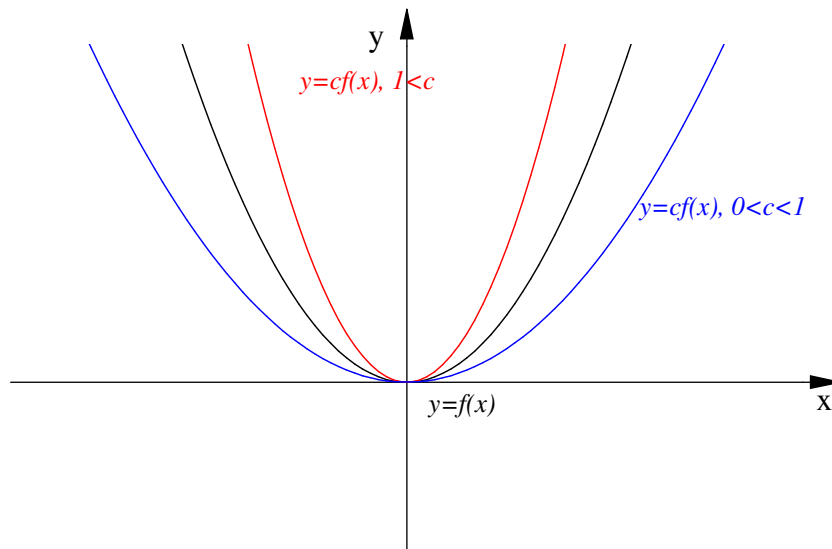
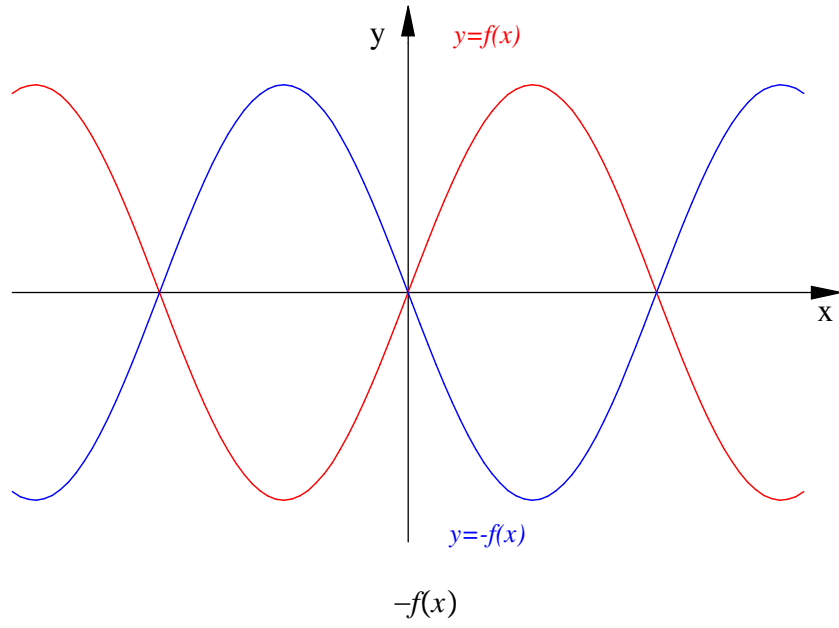
$y = \operatorname{tg}x$  és  $y = \operatorname{ctg}x$

*függvények ábrázolása függvény-transzformáció segítségével*

I. A függvényérték transzformációja



$f(x) + a$

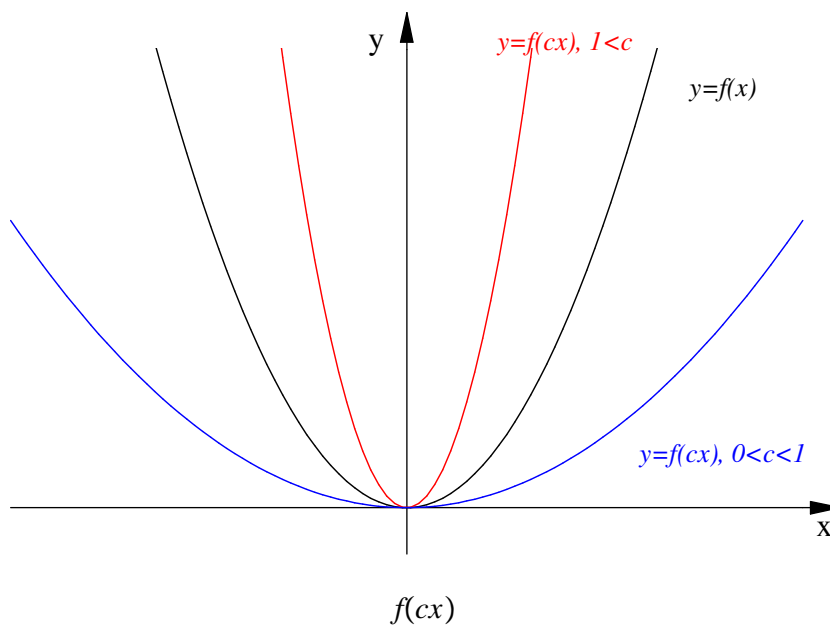
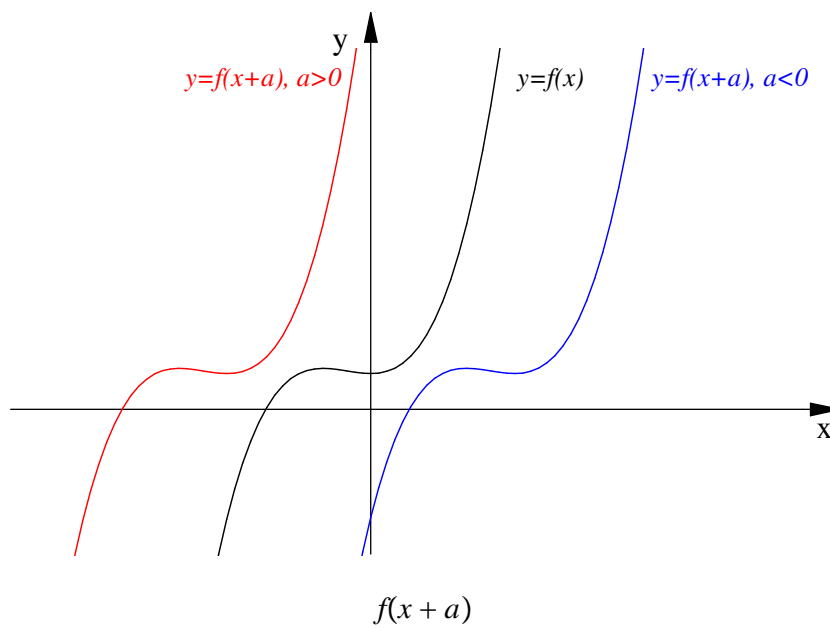


$$cf(x); 0 < c$$

$$cf(x) + a$$

1.  $f(x)$
2.  $cf(x)$
3.  $cf(x) + a$

## II. A változó transzformációja



## Feladatok

1. Ábrázolja a

$$[-1; 7] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 - 6x + 5$$

függvényt! Állapítsa meg a függvény értékkészletét! Mely  $x$  értékekre lesz

a. pozitív

b. negatív

c. nulla

a függvény értéke?

2. Ábrázolja a

$$[-3; 3] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = ||x| - 1| - 2|$$

függvényt! Állapítsa meg a függvény értékkészletét!

3. Ábrázolja a

$$[-5; 4] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |x + 2| + |x - 1|$$

függvényt! Állapítsa meg a függvény értékkészletét!

4. Mely valós számokra értelmezhető az

a.  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

b.  $\lg(x^2 - x + 6) + \lg(4 - x^2)$

c.  $\sqrt{\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x}$

d.  $\frac{(x-3) \cdot 2^x}{x-3}$

5. Mit állíthatunk a következő függvények korlátosságáról?

a.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 1$

b.  $[-1; 7] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 1$

c.  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2 + \lg x$

d.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$

6. Mit állíthatunk a következő függvények monotonitásáról?

a.  $(-\infty; -1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

b.  $(-1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1}$



c.  $[0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$

d.  $[-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$

7. Lehet-e egy páros függvény értelmezési tartománya a  $[-1; 2]$  intervallum?

8. Lehet-e egy páros függvény értékkészlete a  $[-1; 2]$  intervallum?

9. Lehet-e egy páratlan függvény értelmezési tartománya a  $[-2; 3]$  intervallum?

10. Lehet-e egy páratlan függvény értékkészlete a  $[-2; 3]$  intervallum?

11. Igazak-e az alábbi állítások?

a. Egy korlátos függvénynek mindig van maximuma.

b. Ha egy függvénynek van maximuma, akkor az korlátos.

c. Van olyan függvény, amelyik monoton növekedő és monoton csökkenő az  $[a; b]$  intervallumon.

d. Van olyan függvény, amelyik szigorúan monoton növekedő és szigorúan monoton csökkenő az  $[a; b]$  intervallumon.

e. Egy, a teljes számegyenesen értelmezett periódikus függvénynek lehet végecsok zérus helye.

12. Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényeket!

a.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

b.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |2 \cos x - 1|$

c.  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{|x-1|}{x}$

13. Ábrázoljuk függvénytranszformáció segítségével az alábbi függvényeket!

a.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \{x + 1\} + 1$

b.  $[-\frac{1}{3}; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x + 1}$

c.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + 1$

d.  $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{x+1}$