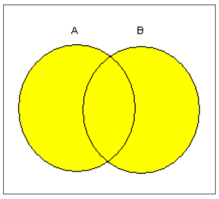
Halmazok, **halmazműveletek**

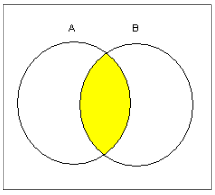
halmaz, halmaz elemei
megadása: elemek felsorolása, utasítással
jelölése: $A = \{\ldots\}$, $\emptyset$ üreshalmaz
halmazok egyenlősége
részhalmaz $A \subset B$, $A \subseteq B$
halmazműveletek, tulajdonságaik
unió



$$A \cup B$$

$$A \cup A = A,\ A \cup B = B \cup A,\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

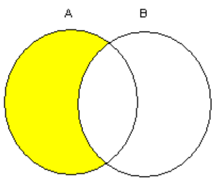
metszet



$$A \cap B$$

$$A \cap A = A,\ A \cap B = B \cap A,\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),\quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

különbség



$$A \setminus B$$

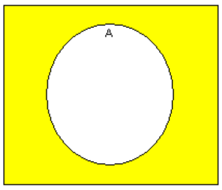
$$A \setminus A = \emptyset,\ A \setminus \emptyset = A,\ \emptyset \setminus A = \emptyset,$$

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset,\ (A \setminus B) \cup B = A \cup B$$

további fogalmak
diszjunkt halmazok

$$A \cap B = \emptyset$$

A halmaz komplementere



$\overline{A}$

$H \neq \emptyset$ és $A \subset H$ esetén $\overline{A} = H \setminus A$.

Számhalmazok

természetes számok, $\mathbb{N}$

$$0; 1; 2; \ldots$$

összeadás, szorzás tulajdonságai
kommutatív
asszociatív
disztributív

Az összeadás segítségével definiáljuk a természetes számok körében, hogy mit értünk a következő *reláción*:

a kisebb $\left(\text{nagyobb}\right)$, mint b.

egész számok, $\mathbb{Z}$

A természetes számok halmazában az összeadás és a szorzás mindig elvégezhető, az $a - b$ *kivonás* azonban csak akkor, ha $a \geq b$. Azért, hogy megszorítás nélkül elvégezhető legyen ez a művelet is bővítjük a természetes számok halmazát a $-1; -2; \ldots$ negatív számokkal.

racionális számok, $\mathbb{Q}$
törtszám
racionális számok összeadása, szorzása

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

racionális számok tizedestört alakja

irracionális számok, $\mathbb{Q}^*$
valós számok, $\mathbb{R}$
komplex számok, $\mathbb{C}$

Feladatok:

1. Adott két halmaz:

$$K = \{n \mid k \in \mathbb{N};\ n = 2k;\ 0 \leq k < 30\}$$
$$L = \{x \mid x \in \mathbb{N};\ x < 30;\ 3 \mid x\}.$$

Adja meg $K \cup L$ és $K \cap L$ halmazokat!

2. Adott egy kör középpontja (O), sugara(r) és egy szelője(e). A kör síkjában tekintsük az alábbi ponthalmazokat:

$$K = \{P \mid OP \leq r\}$$
$$L = \{P \mid OP = r\}$$
$$M = \{P \mid OP < r\}$$
$$N = \{\text{ az } e \text{ szelő pontjai}\}$$

Ábrázoljuk a $K \cap N$; $L \cap N$; $M \cap N$; $K \setminus N$; $N \setminus K$ halmazokat!

3. Ábrázoljuk az xy koordinátasíkon az alábbi ponthalmazokat!

$$A = \{P(x;y) \mid x,y \in \mathbb{R};\ 0 \leq x \leq 1;\ 0 < y < 1\}$$
$$B = \{P(x;y) \mid x,y \in \mathbb{R}; |x| + |y+1| = 2\}$$
$$C = \{P(x;y) \mid x,y \in \mathbb{R};\ x^2 + y^2 = 1\}$$
$$D = \{P(x;y) \mid x,y \in \mathbb{R};\ x^2 + y^2 < 1\}$$

4. Igazoljuk az alábbi állítások helyességét!

a. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

b. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

c. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

d. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cup B)$

5. Választunk két számot $(x;y)$ a $[0;1]$ intervallumon, egymástól függetlenül. Ábrázoljuk az alábbi halmazokat!

$A = \{\text{mindkét szám kisebb } \frac{1}{2}\text{-nél.}\}$

$B = \{\text{valamelyik szám kisebb } \frac{1}{2}\text{-nél.}\}$

$C = \{\text{egyik szám sem kisebb } \frac{1}{2}\text{-nél.}\}.$

6. Egy osztály minden tanulója tanulja az angol, francia, német nyelv közül legalább az egyiket. 18 tanul angolt, 17 franciát és 22 németet; 11 tanul angolt és franciát, 10 franciát és németet, 13 angolt és németet, 8 pedig mindhármat. Hányan vannak az osztályban?

7. Bizonyítsa be, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám!

8. Bizonyítsa be, hogy $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$!

9. Bizonyítsa be, hogy $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$!

10. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely 11-gyel osztva 10; 13-mal osztva 12 maradékot ad?