Kétváltozós függvény helyi szélsőértéke

Elmélet

Theorem 1 (Tétel) *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in dom(f)$ és f értelmezve van az az $(x_0, y_0) \in dom(f)$ valamely $K_\varepsilon(x_0, y_0)$ környezetében. Tegyük fel, hogy az f függvény $2-$szer folytonosan differenciálható az (x_0, y_0) pontban, továbbá*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Ha

$$f''_{xx}f(x_0, y_0)\, f''_{yy}f(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}f(x_0, y_0)\right)^2 > 0$$

akkor (x_0, y_0) $f-$nek lokális szélsőértékhelye, mégpedig ha

$$f''_{xx}f(x_0, y_0) > 0,$$

akkor lokális minimumhelye, ha pedig

$$f''_{xx}f(x_0, y_0) < 0,$$

akkor lokális maximumhelye. Ha

$$f''_{xx}f(x_0, y_0)\, f''_{yy}f(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}f(x_0, y_0)\right)^2 < 0$$

akkor (x_0, y_0) $f-$nek nem lokális szélsőértékhelye.

Feladatok

Adja meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit és azok típusát!

1. $$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x + 3y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

2. $$f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2y - y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

3. $$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

4. $$f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 6xy, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nehezebb feladatok

Adja meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit és azok típusát!

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x\ln\left(y^2 + 1\right) - x\ln(x) + x + \frac{2}{5}y^5.$$

1. $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = y\ln\left(x^2 + 1\right) - y\ln(y) + y + \frac{2}{3}x^3.$$

2. $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \ln(x) - \frac{6y^2}{x} + y^2 - x.$$

3. $$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{8x^2 + 1}{y} + x^2y^2 + y.$$

4.
$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = \frac{8y^2 + 1}{x} + x^2y^2 + x.$$

5.
$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = \frac{2}{x} + \frac{5}{6}\ln\left(y\right) + 3xy + y.$$

6.
$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = -\frac{3}{y} - \frac{7}{6}\ln\left(x\right) - 2xy + x.$$

7.
$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = \frac{y}{x+1} + \frac{4}{y^2} + xy.$$

8.
$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = \frac{2}{x} + \frac{2x}{y} + y^2.$$

9.
$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = 4\ln\left(x\right) + \frac{4}{xy} + 2y^2.$$

10.
$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = \left(x + y^2\right)e^{x-2y}.$$

11.
$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = -\frac{6y^2}{x} + y^2 - x.$$

12.
$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = \frac{x^2}{y} + 4\ln\left(x + y\right).$$

13.
$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(x, y\right) = \frac{x}{y} + \frac{1}{9}x^2y + x.$$