Hatványsorok

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Legyen adva egy $x_0 \in \mathbb{R}$ szám és egy $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ valós sorozat. A*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ...$$

függvénysort x_0 körüli hatványsornak nevezzük. Az x_0 szám a hatványsor középpontja, x pedig a valós változó.

Definition 2 (Definíció) *A hatványsor konvergenciatartományán a*

$$K = \left\{ c \in \mathbb{R} \mid \text{ a } \sum_{k=0}^{\infty} a_k (c - x_0)^k \text{ számsor konvergens} \right\}$$

halmazt értjük.

Nyilvánvaló, hogy $x_0 \in K$, tehát $K \neq \emptyset$.

Theorem 3 (Tétel) *Legyen K a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya, és*

$$r = \sup \{ |c - x_0| \mid c \in K \} \in [0, \infty].$$

Ha $r = 0$, akkor $K = \{x_0\}$. Ha $r = +\infty$, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (c - x_0)^k$ hatványsor abszolút konvergens, és így $K = \mathbb{R}$. Ha pedig $r \in (0, \infty)$, akkor minden olyan $c-$re , amelyre $|c - x_0| < r$ $(|c - x_0| > r)$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (c - x_0)^k$ hatványsor abszolút konvergens (divergens), s ezért $(x_0 - r, x_0 + r) \subset K \subset [x_0 - r, x_0 + r]$.

Mivel a hatványsor konvergenciatartománya az $r = 0$ esettől eltekintve intervallum, a konvergenciatartomány helyett a konvergenciaintervallum elnevezés is használatos.

Definition 4 (Definíció) *Az előző tételben szereplő r számot a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciasugarának nevezzük.*

Theorem 5 (Tétel) ***(Cauchy–Hadamard-képlet)*** *Legyen r a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciasugara, és*

$$\rho = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Ekkor

$$r = \begin{cases} 0, & ha\ \rho = +\infty \\ \dfrac{1}{\rho}, & ha\ \rho \in (0, \infty) \\ +\infty, & ha\ \rho = 0 \end{cases}.$$

A hatványsor konvergenciatartományának meghatározására gyakran jól használható a következő tétel.

Theorem 6 (Tétel) *.Legyen r a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

hatványsor konvergenciasugara. Tegyük fel, hogy $a_k \neq 0$ *véges számú kivétellel, és valamely* $\lambda \in [0, \infty]$ *számra*

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}.$$

Ekkor

$$r = \begin{cases} 0, \ ha\ \lambda = +\infty \\ \dfrac{1}{\lambda}, \ ha\ \lambda \in (0, \infty) \\ +\infty, \ ha\ \lambda = 0 \end{cases}.$$

Definition 7 (Definíció) *Legyen* K *a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *hatványsor konvergenciatartománya. Az*

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in K,$$

képlettel definiált $s : K \to \mathbb{R}$ *függvényt a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *hatványsor összegfüggvényének mondjuk.*

Theorem 8 (Tétel) ***(Tagonkénti differenciálás).*** *Ha a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *hatványsor* r *konvergenciasugara pozitív, akkor a hatványsor* s *összegfüggvénye akárhányszor differenciálható a konvergenciaintervallum belsejében, és* $n-$*edik deriváltja a hatványsor* $n-$*szeri tagonkénti differenciálásával kapható meg, azaz*

$$\begin{aligned} s'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x - x_0)^{k-1}, \\ s''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k (k-1) (x - x_0)^{k-2}, \\ &\vdots \\ s^{(n)}(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k (k-1) \ldots (k-n+1) (x - x_0)^{k-n}, \end{aligned}$$

valahányszor $|x - x_0| < r$.

Theorem 9 (Tétel) ***(Tagonkénti integrálás).*** *Ha a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *hatványsor konvergenciasugara pozitív és* $[a, b]$ *része a hatványsor konvergenciaintervallumának, akkor a hatványsor* s *összegfüggvénye tagonként integrálható* $[a, b]-n$*, azaz*

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k (x - x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} \right]_a^b$$

Speciális hatványsorok és összegfüggvényei

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &= e^x, \qquad x \in \mathbb{R}, \\
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} &= \cos x, \qquad x \in \mathbb{R}, \\
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} &= \sin x, \qquad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

Feladatok

1. Adja meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

(a)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$	(b)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x}{3}\right)^n,$
(c)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2x)^n,$	(d)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x+1)^n,$
(e)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!},$	(f)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^2},$
(g)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n},$	(h)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x-1)^n,$
(i)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{n^2},$	(j)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n}},$
(k)	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n,$	(l)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2n+1},$
(m)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n^2},$	(n)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n},$
(p)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{2^n},$	(q)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\,(n+1)}.$

2. Adja meg az alábbi hatványsor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

(a) $\sum_{n=3}^{\infty} x^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$, (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n+1}}{n+1}$, (j) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(x+1)^n$,

(k) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n$, (l) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,(x-1)^{n-1}$,

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,(x-1)^n$, (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$,

(p) $\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)(x-3)^{n-2}$, (q) $\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, x^n$.