

Függvények folytonossága

Elmélet

Definition 1 (Definíció) Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **folytonosnak** nevezzük az $a \in \text{dom} f$ pontban, ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Azaz létezik a határérték és ez megegyezik a függvényértékkel.

Definition 2 (Definíció) Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **jobbról (balról) folytonos** az $a \in \text{dom} f$ pontban, ha

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \right).$$

Theorem 3 (Tétel) Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos az $a \in \text{dom} f$ pontban, ha

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

Feladatok

1. Folytonos-e az alábbi függvény 0-nál? Válaszát indokolja!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

2. Folytonos-e az alábbi függvény 1-nél? Válaszát indokolja!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x - x^2} - x}{x - 1}, & x \in [0, 2] \setminus \{1\} \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

3. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin((x-2)^2)}{3(x-2)}$. Adja meg azt a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $g(x) = f(x)$ bármely $x \neq 2$ esetén, és g folytonos 2-nél.

4. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{c \sin((2x))}{x}, & \text{ha } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$.

(a) Határozza meg a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ határértéket!

(b) Adja meg azt a c valós számot, amelyre van olyan $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $g(x) = f(x)$ bármely $x \neq 0$ esetén, és g folytonos 0-nál.

5. Folytonos-e az alábbi függvény 0-nál? Válaszát indokolja!

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x+1}{x+6} \right)^{\lg(x)}, & x > 0 \\ 2^{x+1}, & x \leq 0 \end{cases}$$