Egyváltozós függvények differenciálszámítása

Elmélet
A differenciálhatóság fogalma

Definition 1 (Definíció) *Legyen az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény értelmezve az* $a \in dom f$ *pont valamely környezetében, és legyen* $x \in dom f \setminus \{a\}$. *Az*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

hányadost az f *függvény* a *és* x *helyekhez tartozó* ***különbségi (differencia) hányadosá****nak nevezzük.*

Definition 2 (Definíció) *Ha a*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték létezik és véges, akkor az f *függvény* ***differenciálható*** *az* a *helyen, a határértéket pedig az* f *függvény* a *pontbeli* ***differenciálhányados****ának nevezzük. Jele:* $f'(a)$.

Definition 3 (Definíció) *Az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény* a *pontbeli* ***jobb oldali (bal oldali) differenciálhányados****ának nevezzük a*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left(\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

határértéket, feltéve, hogy ez a határérték létezik és véges. Jele: $f'_+(a)$ $\left(f'_-(a)\right)$.

Theorem 4 (Tétel) *Ha az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény és a* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* a *helyen, akkor ugyanolyan az* $f \pm g$, $f \cdot g$ *és a* $g(a) \neq 0$ *feltétel mellett az* $\frac{f}{g}$ *függvény is, mégpedig*

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a), \\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a) g(a) + f(a) g'(a), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) g(a) - f(a) g'(a)}{g^2(a)}. \end{aligned}$$

Theorem 5 (Tétel) *Ha a* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* a *helyen és az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható a* $g(a)$ *helyen, akkor az* $f \circ g$ *függvény is differenciálható az* a *helyen, mégpedig*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Definition 6 (Definíció) *Ha az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* a *helyen, akkor az*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

egyenest az f *függvény* a *helyhez tartozó* ***érintő****jének nevezzük.*

Elemi függvények deriváltjai

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
a^x	$a^x \ln a$	tgx	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$ctgx$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$$c, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$$

Feladatok

1. Adja meg az alábbi függvény deriváltfüggvényét!

(a)
$$f(x) = \sin\sqrt{x} + \frac{\cos x}{\ln x},$$

(b)
$$f(x) = \cos(e^x) + \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt[5]{x}},$$

(c)
$$f(x) = \ln(5\mathrm{tg}x) + \frac{\cos x}{e^{3x}},$$

(d)
$$f(x) = \frac{\mathrm{ctg}\left(x^3\right)}{\ln(x)} + \cos(x)\, 2^x,$$

(e)
$$f(x) = \frac{3^{\sqrt{2x+1}}}{\sin(x)} + \mathrm{tg}^5(8x),$$

(f)
$$f(x) = \cos\left(\frac{5+x^5}{\ln(x) - x}\right),$$

(g)
$$f(x) = \mathrm{tg}(6x)\sqrt{2^x + 3x^3},$$

(h)
$$f(x) = \frac{\mathrm{ctg}\left(4x^5 + 2^x\right) + \ln x}{\cos 3x},$$

(i)
$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x} \cdot \sqrt[4]{3x-2},$$

(j)
$$f(x) = \cos(\ln x - 4^x) \cdot e^{3x^2 - 7x}.$$

2. Határozza meg az alábbi függvény grafikonjához tartozó, $x_0 = 3$ abszcisszájú pontjára illeszkedő érintő egyenletét!

$$f(x) = \frac{1-2x}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3. Határozza meg az alábbi függvény grafikonjához tartozó, $x_0 = 2$ abszcisszájú pontjára illeszkedő érintő egyenletét!

$$f(x) = \frac{x+1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$